CÁLCULO AVANZADO

PRIMER CUATRIMESTRE 2026

SOLUCIONES DEL PRIMER EXAMEN PARCIAL

Ejercicio 1. Decidir si el conjunto $Z = \{(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}_0} : a_{n+2026} \leq a_n \ (\forall n \in \mathbb{N}_0)\}$ es numerable.

Demostración. Veremos que Z es efectivamente numberable. Ya sabemos que es infinito, ya que por ejemplo contiene a las sucesiones constantes, así que concentraremos nuestros esfuerzos en ver que $\#Z \leq \aleph_0$.

Consideremos $D = \{(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}_0} : a_{n+1} \leq a_n\}$. Si $a = (a_n)_{n\geq 0} \in Z$, entonces para cada $r \in R := \{0, \ldots, 2025\}$ la sucesión $a^r := (a_{2026n+r})_{n\geq 0}$ de índices congruentes a r módulo 2026 de a es un elemento de D. Esto es porque para cada $n \geq 0$,

$$a^r_{n+1} = a_{2026(n+1)+r} = a_{2026n+r+2026} \leq a_{2026n+r} = a^r_n.$$

Por lo tanto, la función

$$j\colon Z \to D^{2026}, \qquad j(a) = (a^0, \ldots, a^{2025})$$

está bien definida. Afirmamos más aún que j es inyectiva. En efecto, si $a, b \in Z$ son sucesiones distintas, entonces difieren en cierta coordenada $j_0 \in \mathbb{N}_0$, que, por algoritmo de división, puede escribirse como $2026n_0 + r_0$ para ciertos $n_0 \geq 0$ y $r_0 \in R$. En consecuencia a^{r_0} y b^{r_0} difieren en el lugar n_0, lo cual nos dice que $a^{r_0} \neq b^{r_0}$. A su vez esto último implica que $j(a)$ y $j(b)$ son tuplas distintas, ya que difieren en la r_0-ésima coordenada, probando así que j es inyectiva. Hemos visto hasta aquí que $\#Z \leq \#(D^{2026})$. Para terminar veremos que D es numerable, de lo que se deducirá finalmente que $\#Z \leq \aleph_0^{2026} = \aleph_0$.

Observemos que una sucesión $a \in D$ tiene únicamente finitos términos n para los cuales $a_{n+1} < a_n$: en caso contrario, se tendría una subsucesión $(a_{n_j})_{j\geq 0}$ estrictamente decreciente, y luego

$$a_{n_j} \leq a_{n_0} - j \qquad (\forall j \geq 0).$$

Esto es absurdo pues tomando j suficientemente grande (por ejemplo $j = 2a_{n_0}$) nos diría que a toma valores negativos. Hemos visto entonces que para toda $a \in D$, el conjunto $\operatorname{dec}(a) = \{j \in J : a_{j+1} < a_j\}$ es finito. Por lo tanto, si para cada $S \subset \mathbb{N}$ finito escribimos

$$D_S = \{a \in D : \operatorname{dec}(a) = S\}$$

y notamos $\mathscr{P}_{\mathsf{fin}}(\mathbb{N}) = \{S \subset \mathbb{N} : \ S \text{ es finito}\}$, entonces

$$D = \bigcup_{S \in \mathscr{P}_{\mathsf{fin}}(\mathbb{N})} D_S.$$

Como ya sabemos que $\mathscr{P}_{\mathsf{fin}}(\mathbb{N})$ es numerable[1], esto reduce el problema de probar que D es numerable a probar que dado un conjunto finito $S \subset \mathbb{N}$ el conjunto D_S es numerable.

Para probar que D_S es numerable hacemos la siguiente observación: si dada $a \in D_S$, conocemos el valor a_0 inicial, y conocemos cuánto decrece de a_s a a_{s+1} para cada $j \in S$, entonces conocemos la sucesión en su totalidad. Por lo tanto, la función

$$\varphi\colon D_S \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}^S, \qquad \varphi(a) = (a_0, (a_{s+1} - a_s)_{s\in S})$$

es inyectiva y $\#D_S \leq \aleph_0 \times \aleph_0^{\#S} = \aleph_0$. □

[1] Esto puede verse, por ejemplo, notando que es infinito y que la igualdad $\mathscr{P}_{\mathsf{fin}}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\geq 1} \mathscr{P}(\{1, \ldots, n\})$ lo exhibe como unión contable de conjuntos contables.

Ejercicio 2. Sea $(\mathbb{R}^2, d)$ la estructura usual de espacio métrico de $\mathbb{R}^2$, es decir, $d(x,y) = \|x-y\|_2$, y sea $\mathfrak{F} = \{C \subset \mathbb{R}^2 : C$ es cerrado, acotado y no vacío$\}$. Pruebe que

$$d_H\colon \mathfrak{F}\times\mathfrak{F} \to \mathbb{R}, \quad d_H(A,B) = \text{máx}\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}$$

define una métrica en $\mathfrak{F}$.

Demostración. Por definición d_H resulta simétrica. Veamos que si tenemos $A,B \in \mathfrak{F}$ tales que $d_H(A,B) = 0$, entonces $A = B$. Un máximo (resp. supremo) de un conjunto de números no negativos es 0 únicamente si el conjunto consiste sólo del 0. Se sigue de esta observación que para cada $a \in A$ y $b \in A$ debemos tener que $d(a,B) = 0$ y $d(b,A) = 0$. Por lo tanto $a \in \overline{B}$ para todo $a \in A$ y $b \in \overline{A}$ para todo $b \in B$; es decir $A \subset \overline{B}$ y $B \subset \overline{A}$. Como tanto A como B se suponen cerrados, las anteriores contenciones se leen $A \subset B$ y $B \subset A$, lo cual nos dice finalmente que $A = B$.

Para terminar probamos la desigualdad triangular. Debemos ver, dados A, B y C en $\mathfrak{F}$, que $d_H(A,B) \le d_H(A,C)+d(C,B)$. Por definición de máximo esto equivale a ver que $\sup_{a\in A} d(a,B) \le d_H(A,C) + d_H(C,B)$ y $\sup_{b\in B} d(b,A) \le d_H(A,C) + d_H(C,B)$. En estas desigualdades A y B cumplen roles simétricos, por lo que sin pérdida de generalidad podemos probar únicamente la primera de ellas.

Por definición de supremo, tendremos que $\sup_{a\in A} d(a,B) \le d_H(A,C) + d_H(C,B)$ si y sólo si $d_H(A,C) + d_H(C,B)$ es una cota superior para el conjunto $\{d(a,B) : a \in A\}$. Fijemos entonces $a \in A$ y veamos que $d(a,B) \le d_H(A,C) + d_H(C,B)$. Para cada $b \in B$ y $c \in C$, la desigualdad triangular para d nos dice que

$$d(a,b) \le d(a,c) + d(c,b),$$

y tomando ínfimo en $b \in B$ a ambos lados de la desigualdad anterior tenemos que

$$d(a,B) \le d(a,c) + d(c,B) \le d(a,c) + d_H(C,B).$$

Ahora tomando ínfimo en $c \in C$ en los extremos de esta última desigualdad, resulta que

$$d(a,B) \le d(a,C) + d_H(C,B) \le d_H(A,C) + d_H(C,B),$$

lo cual concluye la prueba. □

Ejercicio 3. Consideremos la métrica en $M_2\mathbb{R}$ dada por $d_1(A,B) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 |A_{ij} - B_{ij}|$. Pruebe que el conjunto

$$U = \left\{A \in M_2\mathbb{R} : \det(A + A^t) > A_{11}\right\}$$

es abierto en $(M_2\mathbb{R}, d_1)$.

Demostración. Como dados $1 \le i,j \le 2$ se tiene que $|A_{ij} - B_{ij}| \le d_1(A,B)$, la función $c_{ij}\colon M_2\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c_{ij}(A) = A_{ij}$ es Lipschitz y en particular continua. De aquí se sigue entonces que

$$e\colon M_2\mathbb{R} \to \mathbb{R}^4, \quad e(A) = (A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}).$$

es continua. Si escribimos $\det(A + A^t) - A_{11}$ en términos de los coeficientes de una matriz A, esto resulta de la forma

$$p(A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}) = (p \circ e)(A)$$

con $p\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por un polinomio[2] que no depende de A. En particular $p \circ e$ es continua. Por último, como $U = (p\circ e)^{-1}(-\infty, 0)$ es preimagen de un abierto por una función continua, resulta abierto en $M_2\mathbb{R}$. □

[2]En concreto, $p = 4X_{11}X_{22} - (X_{12} + X_{21})^2 - X_{11}$.

Ejercicio 4. Sea (X,d) un espacio métrico y $f : X \to [0,1]$ una función. Consideramos en $X \times [0,1]$ la métrica $d'((x,t),(y,s)) = \text{máx}\{d(x,y), |t-s|\}$. Pruebe que si

$$G_f = \{(x, f(x)) \in X \times [0,1] : x \in X\}$$

es cerrado en $(X \times [0,1], d')$, entonces f es continua.

Solución. Queremos ver que si $x_n \to x$ en X entonces $f(x_n) \to f(x)$ en $[0,1]$. Es suficiente ver que dada una subsucesión $(f(x_{n_k}))_{k\geq 1}$ de $(f(x_n))_{n\geq 1}$ existe una subsucesión $(f(x_{n_{k_j}}))_{j\geq 1}$ convergente a $f(x)$. Fijemos una tal subsucesión $(f(x_{n_k}))_{k\geq 1}$, que al pertenecer a $[0,1]$, necesariamente tiene una subsuseción $(f(x_{n_{k_j}}))_{j\geq 1}$ que converge a cierto límite ℓ. Resta ver que $\ell = f(x)$. A continuación podemos considerar la sucesión $((x_{n_{k_j}}, f(x_{n_{k_j}})))_{n\geq 1} \subset G_f$. Como $d'((x,t),(y,s)) = \text{máx}\{d(x,y), |t-s|\}$, sabemos que una sucesión (a_n, t_n) en $X \times [0,1]$ tiende a (a,t) si y sólo si $a_n \to a$ y $t_n \to t$, y por lo tanto

$$(x_{n_{k_j}}, f(x_{n_{k_j}})) \to (x, \ell).$$

Dado que G_f es cerrado, debe ser $(x,\ell) \in G_f$; es decir $\ell = f(x)$ como queríamos probar. $\square$