

Cálculo Avanzado
Primer cuatrimestre – 2026
Práctica 8
Sucesiones de funciones

Ejercicio 1.

(I) En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida en el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ dado:

- a) $A = (-1, 1]$, $f_n(x) = x^n$;
- b) $A = (1, +\infty)$, $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$;
- c) $A = [0, 1]$, $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$.

(II) Demostrar que la sucesión de (a) converge uniformemente en $B = (0, \frac{1}{2})$. ¿Es uniforme la convergencia en $(-1, 1]$?

(III) Demostrar que la sucesión de (b) converge uniformemente en $B = [2, 5]$. ¿Es uniforme la convergencia en $(1, 2)$? ¿Y en $(2, +\infty)$?

(IV) Demostrar que para la sucesión de (c) existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ pero el mismo no coincide con la integral del límite puntual.

Ejercicio 2. Sean X un espacio métrico y A un conjunto. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de A en X y sea $f : A \rightarrow X$. Probar que: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **no** converge uniformemente a f sobre A si y solamente si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y una sucesión $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en A tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

- (I) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (II) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (III) $f_n(z) = \frac{n}{n+1}z$, $z \in \mathbb{C}$.
- (IV) $f_n(z) = nz^2$, $z \in \mathbb{C}$.
- (V) $f_n(z) = z^n$, en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Ejercicio 4. Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x^3}{1+nx^2}$ converge puntualmente pero no uniformemente, en $\mathbb{R}$, a una función continua.

Ejercicio 5. Sea X un conjunto y sea $B(X) = \{g : X \rightarrow \mathbb{C} : g \text{ es acotada}\}$. Consideremos una sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(X)$.

(I) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función f en X , ¿es cierto que $f \in B(X)$?

(II) Probar que:

- a) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función f en X , entonces $f \in B(X)$.
- b) La sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y sólo si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en $(B(X), d_\infty)$.
- c) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en X , entonces existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada.

Ejercicio 6. Sea X un espacio métrico, sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

- (I) Probar que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f , entonces para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ que converge a $x \in X$ se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$.
- (II) Probar que si X es compacto, y para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ que converge a $x \in X$ se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$, entonces f_n converge uniformemente a f .

Ejercicio 7. Sea X un conjunto y sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de funciones de X en $\mathbb{R}$ que convergen uniformemente sobre X .

- (I) Probar que $(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre X .
- (II) Probar que si las funciones f_n y g_n son acotadas, entonces $(f_n \cdot g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre X .
- (III) Mostrar con un ejemplo que el resultado anterior no es cierto si se permite que las funciones g_n no estén acotadas.

Ejercicio 8. Sean X un espacio métrico compacto y A un conjunto. Probar que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, y $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función $g : A \rightarrow X$, entonces la sucesión $(f_n \circ g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones de A en $\mathbb{R}$ converge uniformemente a $f \circ g$. Mostrar con un ejemplo que el resultado anterior no es cierto si se omite la hipótesis de X compacto.

Ejercicio 9. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$ y f'_n en $[-1, 1]$.

Ejercicio 10. Sean X e Y espacios métricos. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones de X en Y es *equicontinua* en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x_0) < \delta$ implica

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad (\forall f \in \mathcal{F}).$$

- (I) Probar que cualquier familia finita de funciones de X en Y continuas en $x_0 \in X$ es equicontinua en x_0 .
- (II) Sea $B(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones de X en Y que son acotadas. Probar que si $\mathcal{F} \subseteq B(X, Y)$ es una familia equicontinua, entonces $\overline{\mathcal{F}}$ también es equicontinua.
- (III) Probar que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas de X en Y que converge uniformemente en X , entonces $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia equicontinua.

Supongamos desde ahora que X es compacto.

- (IV) Probar que si $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua de funciones de X en Y , entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua.

(V) Probar que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones de X en Y uniformemente equicontinua que converge puntualmente a $f : X \rightarrow Y$, entonces esa convergencia es uniforme en X .

Ejercicio 11. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ integrables y uniformemente acotadas, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(s) ds.$$

para cada $x \in [a, b]$. Probar que la sucesión $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión que converge uniformemente sobre $[a, b]$.

Ejercicio 12. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\int_0^1 f(x) x^n dx = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $f \equiv 0$ en $[0, 1]$.

Sugerencia: Usar el Teorema de Stone-Weierstraß.

Ejercicio 13. Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ tales que $f_n \rightrightarrows f$. Decidir si vale la siguiente afirmación:

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx.$$

Ejercicio 14 (criterio de Weierstraß). Sean $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y X un conjunto. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de X en V . Probar que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales positivos tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $\|f_n(x)\| \leq a_n$ para cualesquiera $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente.

Ejercicio 15. Hallar los conjuntos de $\mathbb{R}$ de convergencia puntual, uniforme y no convergencia de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n ; \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n ; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} ; \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Ejercicio 16 (función zeta de Riemann). Consideramos la función dada por la serie:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Probar que la serie converge uniformemente en cada intervalo $(1 + \varepsilon, +\infty)$ hacia una función continua.