

Cálculo Avanzado
Primer cuatrimestre – 2026
Práctica 7
Espacios normados

A lo largo de la práctica, la letra k denotará el cuerpo $\mathbb{R}$ de números reales ó $\mathbb{C}$ de números complejos.

Ejercicio 1. Probar que cada uno de los siguientes es un espacio normado sobre $\mathbb{R}$, y decidir si es un espacio de Banach.

- (I) $\ell^1 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$, con $\|(x_n)_{n \geq 1}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.
- (II) ℓ^1 con $\|(x_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.
- (III) $C[a, b]$ con $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.
- (IV) $C^1[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es de clase } C^1\}$ con $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Ejercicio 2. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Probar las siguientes afirmaciones:

- (I) la función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ es continua;
- (II) las operaciones $+: V \times V \rightarrow V$ y $\cdot : k \times V \rightarrow V$ son funciones continuas;
- (III) $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$;
- (IV) $(\overline{B}(x, r))^\circ = B(x, r)$;
- (v) $\text{diam}(B(x, r)) = 2r$, si $V \neq 0$.

Ejercicio 3. Sea V un k -espacio vectorial y sea $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una métrica que satisfice:

- (I) $d(x+z, y+z) = d(x, y) \quad \forall x, y, z \in V$,
- (II) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \quad \forall x, y \in V \quad \forall \lambda \in k$.

Se define $N : V \rightarrow \mathbb{R}$ como $N(x) = d(0, x)$. Probar que N es una norma en V y verificar que la distancia inducida por N es d .

Ejercicio 4. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset V$. Decimos que C es *convexo* si para todo $x, y \in C$ y $t \in [0, 1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in C$.

- (I) Probar que toda bola abierta es convexa.
- (II) Probar que si C es convexo, entonces C° y $\overline{C}$ también lo son.
- (III) Probar que si $(C_i)_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos convexos de V , entonces $\bigcap_{i \in I} C_i$ es convexo. Deducir que dado un subconjunto $A \subset V$, existe un único conjunto convexo minimal (respecto de la inclusión) que lo contiene. Este conjunto se llama la *cápsula convexa* de A , y lo notamos $\text{Conv}(A)$.
- (IV) Probar que si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ es un subconjunto finito de V , entonces

$$\text{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i : a_i \geq 0 \text{ para todo } i, \sum_{i=1}^n a_i = 1 \right\}.$$

Ejercicio 5. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subset V$ un subespacio vectorial. Probar que:

- (I) $\overline{S}$ es un subespacio vectorial;
- (II) si $S \neq V$, entonces $S^\circ = \emptyset$.

Ejercicio 6. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i$, y decimos que converge absolutamente si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge en $\mathbb{R}$.

- (I) Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, entonces $x_n \rightarrow 0$.
- (II) Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente y V es de Banach, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Ejercicio 7. Dado un k -espacio vectorial V , un subespacio vectorial $H \subset V$ se dice un *hiperplano* si existe $x \in V \setminus 0$ tal que $H \oplus \langle x \rangle = V$.

- (I) Probar que si H es un hiperplano, entonces para todo $y \in V \setminus H$ se tiene que $H \oplus \langle y \rangle = V$.
- (II) Probar que H es un hiperplano si y sólo si existe $\phi: V \rightarrow k$ lineal no nula tal que $H = \ker(\phi)$.
- (III) Probar que si V es un espacio normado y H es un hiperplano, entonces H es o bien cerrado o bien denso en V .

Ejercicio 8. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperplanos.

- (I) $c = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\} \subset \ell^\infty$.
- (II) $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \rightarrow 0\} \subset c$.
- (III) $\{x \in \ell^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset \ell^1$.
- (IV) $\mathbb{R}[X] \subset C[0, 1]$.

Ejercicio 9. Sean V y W espacios normados. Sea $T: V \rightarrow W$ un operador lineal. Probar que son equivalentes:

- (I) T es continuo en 0;
- (II) existe $x_0 \in v$ tal que T es continuo en x_0 ;
- (III) T es continuo;
- (IV) T es uniformemente continuo;
- (V) existe $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in V$;
- (VI) para todo $A \subset V$ acotado, $T(A)$ es acotado.

Ejercicio 10. Sean $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ espacios normados. Consideramos $L(V, W) := \{T: V \rightarrow W : T \text{ es lineal y continua}\}$, y para cada $T \in L(V, W)$ sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|T(x)\|_W.$$

Probar que:

- (I) $(L(V, W), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.
- (II) Si W es de Banach entonces $L(V, W)$ también lo es.

Ejercicio 11. Sean V y W espacios normados y sea $T: V \rightarrow W$ un operador lineal y continuo. Verificar la siguiente igualdad:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x\}.$$

Ejercicio 12. Sean V_1, V_2 y V_3 espacios normados, y sean $f: V_1 \rightarrow V_2$ y $g: V_2 \rightarrow V_3$ operadores lineales continuos. Probar que $\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$.

Ejercicio 13. Sean $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ el espacio normado formado por todos los polinomios con coeficientes reales con la norma $\|p\| = \sup\{|p(x)| : x \in [0, 1]\}$, y $\text{ev}_3: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\text{ev}_3(p) = p(3)$. Probar que ev_3 es lineal pero no continua.

Ejercicio 14. Sean $S, T: \ell^1 \rightarrow \ell^1$ definidos por

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots), \quad T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Probar que $S, T \in L(\ell^1)$ y calcular sus normas.

Ejercicio 15. Sea c es el subespacio de ℓ^∞ dado por las sucesiones convergentes, y sea $T: c \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Probar que T es lineal y continuo y hallar $\|T\|$.

Ejercicio 16. Sean V un espacio normado y $\phi: V \rightarrow k$ un funcional lineal. Probar que ϕ es continuo si y sólo si $\ker(\phi)$ es cerrado.

Ejercicio 17. Sea V un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que no puede tener una base algebraica numerable.