

Cálculo Avanzado
Primer cuatrimestre – 2026
Práctica 5
Compacidad

Ejercicio 1. Sea X un espacio métrico. Consideremos $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión convergente y notemos $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ a su límite. Probar que el subespacio $K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\} \subset X$ es compacto.

Ejercicio 2.

- (I) Mostrar que el intervalo $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ no es compacto.
- (II) Sean $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado de $(\mathbb{Q}, d)$, donde d es la métrica usual de $\mathbb{R}$, pero no es compacto.

Ejercicio 3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $e^{(n)} \in \ell^\infty$ como

$$e_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

Probar que $E = \{e^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^\infty$ es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

Ejercicio 4. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$. Pruebe que la bola cerrada

$$\bar{B}(0, 1) = \left\{ y \in c_0 : \sup_{n \geq 1} |y_n| \leq 1 \right\}$$

no es compacta.

Ejercicio 5. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que:

- (I) Si (X, d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.
- (II) Toda unión finita y toda intersección arbitraria de subconjuntos compactos de X es compacta.
- (III) Un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$.

Ejercicio 6. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que una familia $(F_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de X tiene la *propiedad de intersección finita* si cualquier subfamilia finita de $(F_i)_{i \in I}$ tiene intersección no vacía. Probar que X es compacto si y sólo si toda familia $(F_i)_{i \in I}$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

Ejercicio 7. Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

Ejercicio 8. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Consideremos la métrica en $X \times Y$ dada por

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X, d) e (Y, d') son compactos.

Ejercicio 9. Sea X un espacio métrico compacto y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in X$. Probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq \varepsilon$ para todo $x \in X$.

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico.

- (I) Sean $F \subset X$ cerrado y $x \in X \setminus F$. Probar que no es cierto en general que exista un punto $y \in F$ tal que $d(x, y) = d(x, F)$.

Es decir, la distancia entre un punto y un cerrado puede no realizarse.

- (II) Sean $K \subset X$ un compacto y $x \in X \setminus K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$.

Esto nos dice que la distancia entre un punto y un compacto siempre se realiza.

- (III) Probar que si X tiene la propiedad de que toda bola cerrada es compacta entonces la distancia entre un punto y un cerrado siempre se realiza.

- (IV) Sean $F, K \subset X$ dos subconjuntos disjuntos de X tales que F es cerrado y K es compacto. Probar que la distancia $d(F, K)$ entre F y K es positiva, pero puede no realizarse.

- (V) Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$.

Ejercicio 11. Sean (X, d) un espacio métrico completo y

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X : K \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

- (I) Sea $\tilde{d}(A, B) = \sup_{a \in A} \{d(a, B)\}$. Verificar que en general $\tilde{d}$ **no** es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

- (II) Sea $d : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathbb{R}$, $d(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$ y consideremos para cada $C \subset X$ y $\varepsilon > 0$ el conjunto $B(C, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, C) < \varepsilon\}$ para cada $C \subset X$. Probar que $d(A, B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subset B(B, \varepsilon)$ y $B \subset B(A, \varepsilon)$.

- (III) Probar que d es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

Ejercicio 12. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i \in I}$ de un espacio métrico (X, d) , un número $\varepsilon > 0$ se llama *número de Lebesgue* de $(U_i)_{i \in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Ejercicio 13. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y supongamos que X es compacto. Probar que toda función $X \rightarrow Y$ continua y biyectiva es un homeomorfismo.

Ejercicio 14. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y, d') la proyección $\pi : X \times Y \rightarrow Y$ definida por $\pi(x, y) = y$ es cerrada.

Ejercicio 15. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, y sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $(X \times Y, d_\infty)$, entonces f es continua.

Ejercicio 16. Sea $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que es uniformemente continua en $[b, +\infty)$ para cierto $b > a$. Probar que f es uniformemente continua en $[a, +\infty)$.

Ejercicio 17. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 18. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Probar que toda función $X \rightarrow \mathbb{R}$ semicontinua superiormente alcanza un máximo.