

Cálculo Avanzado
Primer cuatrimestre – 2026
Práctica 4
Complejidad

Ejercicio 1. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si existe $c \geq 0$ tal que

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c d(x_1, x_2)$$

para cada $x_1, x_2 \in X$, entonces f es uniformemente continua.

Ejercicio 2.

(I) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

- a) $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$; y
- b) $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$,

entonces f no es uniformemente continua en A .

(II) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. $\rightarrow Y$ en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?

(III) Verificar que la función $f(x) = \sin(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

Ejercicio 3.

(I) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X . Probar que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y .

(II) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ un homeomorfismo uniforme. Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo. En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

Ejercicio 4.

(I) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

(II) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

Ejercicio 5. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subset X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.

Ejercicio 6. Sean X y Y espacios métricos y supongamos que Y es completo. Sea $D \subset X$ denso y sea $f : D \longrightarrow Y$ una función uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X , es decir, existe una única función continua $F : X \longrightarrow Y$ tal que $F|_D = f$. Probar que F es uniformemente continua.

Ejercicio 7. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. Probar que:

(I) Se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ se tiene que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$.

- (II) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.
- (III) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?
- (IV) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces es acotada.
- (V) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in X$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Ejercicio 8. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X , entonces X es completo.

Ejercicio 9. Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico. Probar que si A y B son completos, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son completos.

Ejercicio 10. Probar que todo espacio métrico con la métrica discreta es completo.

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico.

- (I) Probar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X .
- (II) Probar que si X es completo, entonces todo subconjunto cerrado $F \subseteq X$ es un subespacio completo de X .

Ejercicio 12 (Teorema de Cantor). Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) el espacio métrico X es completo;
- (b) toda familia $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados y no vacíos de X que cumplan:
- $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$; y
 - $F_{n+1} \subset F_n$ para cada $n \geq 1$,

tiene un único punto en su intersección.

Ejercicio 13. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si (X, d) e (Y, d') son completos.

Ejercicio 14.

- (I) Sea X un espacio métrico y sea $B(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es acotada}\}$. Probar que $B(X)$ equipado con la métrica $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ es un espacio métrico completo.
- (II) Sean $a < b \in \mathbb{R}$. Probar que $C[a, b]$ equipado con la métrica $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ es un espacio métrico completo.
- (III) Probar que $c_0 := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid a_n \rightarrow 0\}$ equipado con la métrica $d_\infty((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$ es un espacio métrico completo.

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{D} \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ converge en X . Probar que X es completo.

Ejercicio 16. Probar que todo espacio métrico completo separable y no contable tiene cardinal c .

Ejercicio 17. Sea $X = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ y sea $((Y, d'), i)$ su completación. Calcular el cardinal de $Y \setminus i(X)$.

Ejercicio 18. Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 19. Sean (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X . Probar que D no es un G_δ .

Ejercicio 20. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.

SUGERENCIA: para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \text{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Ejercicio 21. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que un conjunto $A \subset X$ es *nunca denso* si su clausura tiene interior vacío.

(I) Probar que si A es nunca denso, entonces $X \setminus A$ es denso. ¿Vale la recíproca?

(II) Probar que si A es abierto y denso, entonces $X \setminus A$ es nunca denso.

Ejercicio 22. Sea $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{f \in C[0, 1] : f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

(I) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado y nunca denso en $(C[0, 1], d_\infty)$.

(II) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.

Ejercicio 23. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar que son equivalentes:

(I) A es nunca denso;

(II) toda bola abierta B contiene otra bola abierta $B' \subset B$ tal que $B' \cap A = \emptyset$;

(III) A no es denso en ninguna bola abierta.

Ejercicio 24. Sea $\text{Lip}[a, b] = \{f \in C[a, b] : \exists k > 0, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\}$. Probar que $\text{Lip}[a, b]^\circ = \emptyset$ en $C[a, b]$.