

Cálculo Avanzado

Primer cuatrimestre – 2026

Práctica 2

Espacios métricos

Ejercicio 1. Sean $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones dadas por:

$$\begin{aligned}d_1(x, y) &= (x - y)^2, & d_2(x, y) &= \sqrt{|x - y|}, \\d_3(x, y) &= |x^2 - y^2|, & d_4(x, y) &= |x - 2y|, \\d_5 &= \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.\end{aligned}$$

Decidir cuáles de ellas son métricas en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Sean $d_1, d_2, d_\infty: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned}d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, & d_2(x, y) &= \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}, \\d_\infty(x, y) &= \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|\end{aligned}$$

para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

(I) Probar que estas funciones son métricas.

(II) Para $n = 2$, dibujar las bolas abiertas $B_1(0)$ de centro $0 \in \mathbb{R}^2$ y radio 1.

Notar que la métrica d_2 del Ejercicio 2 es la métrica usual de $\mathbb{R}^n$. En adelante, a menos que se indique una métrica diferente, supondremos que $\mathbb{R}^n$ tiene dicha métrica.

Ejercicio 3. Sea X un conjunto y sea $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Verificar que d es una métrica, y hallar los abiertos de (X, d) .

NOTA: la métrica δ se llama la *métrica discreta* en X .

Ejercicio 4. Sea $p \in \mathbb{N}$ un primo fijo, y sea $N: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$N(a) := \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } p^n \mid a \text{ y } p^{n+1} \nmid a; \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Sea $d: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(a, b) := N(a - b)$. Probar que $(\mathbb{Z}, d)$ es un espacio métrico.

Ejercicio 5. Sean $\ell^\infty = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$ y $d: \ell^\infty \times \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(a, b) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|, \quad (a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

Probar que (ℓ^∞, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 6. Dados números reales $a < b$, sea $C[a, b]$ el conjunto de todas las funciones de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ que son continuas. Pruebe que las siguientes funciones definen métricas sobre $C[a, b]$:

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx, \quad d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Ejercicio 7. Sean (X, d) un espacio métrico y $d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$.

- (I) Probar que d' también es una métrica en X , que satisface $0 \leq d'(x, y) < 1$ para todos $x, y \in X$.
- (II) Probar que un subconjunto $A \subset X$ es abierto para la métrica d si y sólo si lo es para la métrica d' .
- (III) Deducir que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge a un punto x con la métrica d si y sólo si también converge a x con la métrica d' .

Ejercicio 8. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Consideremos el conjunto $X_1 \times X_2$ y la aplicación $d: (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$.

- (I) Probar que d es una métrica en $X_1 \times X_2$.
- (II) Probar que en el espacio métrico $(X_1 \times X_2, d)$ se cumple que una sucesión $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto (a, b) si y sólo si converge en cada coordenada, es decir, si y sólo si $a_n \rightarrow a$ en (X_1, d_1) y $b_n \rightarrow b$ en (X_2, d_2) .

Ejercicio 9. Sean $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos y $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ su producto cartesiano. El objetivo de este ejercicio es construir una métrica para X en la cual la convergencia de una sucesión equivalga a la convergencia en cada coordenada.

- (I) Supongamos primero que todos los X_n tienen diámetro menor o igual que 1, es decir, que $d_n(x, y) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in X_n$. Dados dos elementos $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X , definimos

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$

Probar que d es una métrica en X .

- (II) Sea $x^1, x^2, x^3, \dots$ una sucesión de puntos de X , es decir, cada x^k es una sucesión $(x_1^k, x_2^k, \dots)$ en la cual $x_n^k \in X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un elemento de X . Probar que, con la métrica d definida en el ítem anterior, se tiene que $x^k \rightarrow x$ en X si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_n^k \rightarrow x_n$ en X_n .
- (III) Mostrar cómo se puede reducir el caso general (es decir, sin tener la hipótesis $\text{diam}(X_n) \leq 1$ para cada n) al caso ya resuelto en el primer ítem.

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico.

- (I) Probar que si $(F_i)_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X , entonces $\bigcap_{i \in I} F_i$ es cerrado.
- (II) Probar que si $F_1, \dots, F_n$ son subconjuntos cerrados de X , entonces $\bigcup_{j=1}^n F_j$ es cerrado.

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $G \subset X$ abierto y $F \subset X$ cerrado. Probar que $F \setminus G$ es cerrado y $G \setminus F$ es abierto.

Ejercicio 12. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$.

- (I) Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

- (a) $A^\circ = \{x \in X : \exists r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subset A\}$;
- (b) A es abierto si y sólo si $A^\circ = A$;
- (c) $\emptyset^\circ = \emptyset$ y $X^\circ = X$;
- (d) si $A \subset B$, entonces $A^\circ \subset B^\circ$;
- (e) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, ¿se puede generalizar esta propiedad a una intersección infinita?
- (f) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$, ¿vale la igualdad?

(II) Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

- (a) A es cerrado si y sólo si $\bar{A} = A$;
- (b) $\bar{\emptyset} = \emptyset$ y $\bar{X} = X$;
- (c) $A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$;
- (d) $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$, ¿se puede generalizar esta propiedad a una unión infinita?
- (e) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$, ¿se puede generalizar esta propiedad a una intersección infinita?
- (f) $x \in \bar{A}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $x_n \rightarrow x$.

(III) Probar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura:

- (a) $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \bar{A}$;
- (b) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$;
- (c) ¿son ciertas las igualdades $\bar{A} = \overline{A^\circ}$ y $A^\circ = (\bar{A})^\circ$?

(IV) Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto.

- (a) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$;
- (b) ∂A es cerrado;
- (c) $\partial A = \partial(X \setminus A)$;

Ejercicio 13. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r > 0$, se define la *bola cerrada* de centro a y radio r como el conjunto

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}.$$

- (I) Probar que $\bar{B}(a, r)$ es un conjunto cerrado y contiene a $\overline{B(a, r)}$.
- (II) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea la bola cerrada $\bar{B}(a, r)$.

Ejercicio 14. Sean (X, d) un espacio métrico, p un punto de X y a, b números reales tales que $0 < a < b$. Probar que:

- (I) $\{x \in X : a < d(x, p) < b\}$ es abierto;
- (II) $\{x \in X : a \leq d(x, p) \leq b\}$ es cerrado.

Ejercicio 15. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y consideremos al conjunto $X \times Y$ dotado de la métrica d definida en el Ejercicio 8. Probar que si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, entonces:

- (I) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$;
- (II) $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

Ejercicio 16. Sea (X, d) un espacio métrico, y sean $A, B \subset X$.

(I) Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:

- (a) A' es cerrado;
- (b) si $A \subset B$ entonces $A' \subset B'$;
- (c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$;
- (d) $\bar{A} = A \cup A'$;
- (e) $(\bar{A})' = A'$.

(II) Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subset X$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y $x_n \neq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 17. Hallar interior clausura, frontera y conjunto derivado de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

$$[0, 1] \quad ; \quad (0, 1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q} \cap [0, 1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0, 1) \cup \{2\}.$$

Ejercicio 18. Caracterizar los abiertos y los cerrados de $\mathbb{Z}$ considerado como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 19. Probar que toda colección de conjuntos abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^n$, con la métrica usual, es a lo sumo numerable. Dar un ejemplo de colección de conjuntos cerrados disjuntos que no sea numerable.

Ejercicio 20. Sea $\mathcal{B} := \{B(q, r) \subset \mathbb{R}^n : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$. Probar que si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Ejercicio 21. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ con la métrica usual. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de condensación* de S si para todo $r > 0$, se tiene que $B(x, r) \cap S$ es no numerable. Probar que si S es no numerable entonces existe un punto $x \in S$ de condensación de S .

Ejercicio 22. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, con la métrica usual. Probar que el conjunto de puntos aislados de S es contable.

Ejercicio 23. Sea (X, d) un espacio métrico, sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones en X , y sean $x, y \in X$.

- (I) Probar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.
- (II) Probar que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy, entonces la sucesión de números reales $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

Ejercicio 24. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto $A \subseteq X$ es un *conjunto* G_δ si es la intersección de una familia numerable de abiertos de X , y que es un *conjunto* F_σ si es la unión de una familia numerable de cerrados de X .

- (I) Probar que el complemento de un conjunto G_δ es un conjunto F_σ .
- (II) Probar que el complemento de un conjunto F_σ es un conjunto G_δ .
- (III) Probar que todo cerrado es un conjunto G_δ y todo abierto es un conjunto F_σ .
- (IV) (a) Encontrar una familia numerables de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0, 1]$. Ídem para $[0, 1]$.
(b) Encontrar una familia numerable de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0, 1]$.
(c) ¿Qué conclusión puede extraerse de estos ejemplos?

Ejercicio 25. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A \subseteq X$ es no vacío y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* como

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Probar las siguientes afirmaciones:

- (I) si $x, y \in X$, entonces $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.
- (II) si $x \in A$, entonces $d(x, A) = 0$;
- (III) $d(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in \bar{A}$;
- (IV) para cada $r > 0$, el conjunto $B(A, r) = \{x \in X : d(x, A) < r\}$ es abierto.
- (V) para cada $r > 0$, el conjunto $B[A, r] = \{x \in X : d(x, A) \leq r\}$ es cerrado.

Ejercicio 26. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A, B \subseteq X$ son subconjuntos no vacíos, se define la *distancia entre A y B* como

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- (I) $d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B})$;
- (II) $d(A, B) = 0$ si y sólo si $A \cap B \neq \emptyset$;
- (III) $d(A, B) = 0$ si y sólo si $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$;
- (IV) para todo $C \subseteq X$ no vacío se tiene que $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.