DESARROLLOS DECIMALES

JUAN MANUEL MENCONI

1. Introducción

Antes de demostrar la existencia del desarrollo en base b para cualquier entero $b \geq 2$, entendamos la idea geométrica para el caso $b = 10$.

Consideremos un número real, por ejemplo, $x = \frac{\pi}{10} = 0,314159\ldots$. Este número se encuentra en el intervalo $[0,1]$. Partimos este intervalo en 10 subintervalos de longitud $1/10$:

$$\left[0, \frac{1}{10}\right], \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right], \ldots, \left[\frac{9}{10}, 1\right],$$

los cuales vamos a etiquetar utilizando los dígitos $0,1,2,\ldots,9$; es decir, el i-ésimo intervalo será

$$\left[\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10}\right], \qquad 0 \leq i \leq 9.$$

El número x pertenece a alguno de estos intervalos (por ahora supondremos que x no es un punto de división). Llamamos a_1 a la etiqueta del intervalo que contiene a x. En este caso será $a_1 = 3$ ya que

$$\frac{3}{10} = 0,3 < x < 0,4 = \frac{4}{10}.$$

Ahora repetimos este proceso recursivamente. Partimos el intervalo $\left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$ en 10 intervalos de longitud $1/100$:

$$\left[\frac{3}{10}, \frac{3}{10} + \frac{1}{100}\right], \left[\frac{3}{10} + \frac{1}{100}, \frac{3}{10} + \frac{2}{100}\right], \ldots, \left[\frac{3}{10} + \frac{9}{100}, \frac{4}{10}\right]$$

y los etiquetamos nuevamente con los dígitos $0,1,\ldots,9$. El número x pertenece al intervalo etiquetado con 1:

$$\left[\frac{3}{10} + \frac{1}{100}, \frac{3}{10} + \frac{2}{100}\right],$$

por lo que definimos $a_2 = 1$.

Observemos que hasta ahora tenemos:

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{100} = 0,31 \quad < \quad x = 0,314159\ldots \quad < \quad 0,32 = \frac{3}{10} + \frac{2}{100}.$$

Repetimos una vez más. Tomamos el intervalo $\left[\frac{31}{100}, \frac{32}{100}\right]$ y lo dividimos en 10 subintervalos de longitud $1/1000$:

$$\left[\frac{31}{100}, \frac{31}{100} + \frac{1}{1000}\right], \left[\frac{31}{100} + \frac{1}{1000}, \frac{31}{100} + \frac{2}{1000}\right], \ldots, \left[\frac{31}{100} + \frac{9}{1000}, \frac{32}{100}\right].$$

Sus etiquetas son nuevamente $0,1,\ldots,9$. El número x cae en el intervalo etiquetado con 4, ya que

$$\frac{31}{100} + \frac{4}{1000} = 0,314 \quad < \quad x = 0,314159\ldots \quad < \quad 0,315 = \frac{31}{100} + \frac{5}{1000}.$$

Por lo tanto, $a_3 = 4$.

Continuando de esta manera, obtenemos una sucesión de intervalos encajados

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$$

con

$$I_n = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^n} \right]$$

y longitudes $|I_n| = \frac{1}{10^n} \to 0$. Se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} \leq x < \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^n}.$$

De aquí resulta

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}.$$

Observación sobre los puntos de división. Cuando el punto x es uno de los bordes de los intervalos, debemos decidir cual de los dos intervalos considerar. Esto lo podemos resolver de dos formas:

- Si en cada paso elegimos el intervalo que tiene a x como extremo izquierdo (es decir, tomamos el intervalo que está a la derecha del punto, por ejemplo $[0,5\,;\,0,6]$ para $x = 0,5$), obtenemos la representación $0,5000\ldots$.
- Si en cada paso elegimos el intervalo que tiene a x como extremo derecho (es decir, tomamos el intervalo que está a la izquierda del punto, por ejemplo $[0,4\,;\,0,5]$ para $x = 0,5$), obtenemos la representación $0,4999\ldots$.

Veremos que los extremos de intervalos (fracciones que se pueden expresar con un denominador igual a una potencia de 10) son los únicos puntos que admiten dos desarrollos distintos, y las únicas posibilidades son una cola de ceros o una cola de nueves.

Desarrollos en base b. Para el caso de desarrollos en base b con $b \geq 2$, procederemos de forma similar, partiendo los intervalos en b subintervalos en lugar de 10.

2. Existencia y "unicidad" del desarrollo en base b

Definición 2.1. Para todo número real z, existe un único entero denotado por $[z]$ tal que

$$[z] \leq z < [z] + 1.$$

A este entero lo llamamos la parte entera de z.

Todo número real z se puede descomponer como

$$z = [z] + (z - [z]) = N + x,$$

donde $N \in \mathbb{Z}$ y $x \in [0,1)$. Esta descomposición como suma de un entero y un número en el intervalo $[0,1)$ es única.

Sea $b \in \mathbb{N}$ con $b \geq 2$. Para estudiar el desarrollo en base b de z, basta analizar por separado el desarrollo en base b del entero N y el del número $x \in [0,1)$.

Damos por sabido el desarrollo en base b de enteros. Por ello nos centraremos en el desarrollo en base b de números en el intervalo $[0,1)$.

Definición 2.2. Sea x un número real en el intervalo $[0,1)$. Una representación en base b de x es una sucesión de enteros $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $0 \le a_n \le b-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$$

converge al número x. En tal caso, escribimos

$$x = 0.a_1a_2a_3\ldots \text{(en base } b) \text{ o } (0.a_1a_2a_3\ldots)_b$$

o simplemente

$$0.a_1a_2a_3\ldots$$

si la base se sobreentiende por el contexto.

Observación 2.3. Si bien el uso de la palabra “decimal” hace referencia a la base $b = 10$, ignoraremos esta imprecisión. A veces utilizamos la expresión ”desarrollo decimal en base b de x” o ”desarrollo en base b de x”.

Ejercicio 2.4. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales convergente, $c \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$. Si*

$$a_n \le c \quad \textit{para todo } n \ge n_0,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le c.$$

Concluir que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números reales convergentes y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ para el cual

$$a_n \le b_n \quad \textit{para todo } n \ge n_0,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Proof. Vamos a demostrarlo por el absurdo. Supongamos que no se cumple, es decir,

$$c < l := \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Consideramos $\varepsilon = l - c > 0$. Por la definición de límite, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \ge n_1$,

$$|a_n - l| < \varepsilon = l - c.$$

En particular, $a_n - l > -\varepsilon = c - l$, de donde $c < a_n$ para todo $n \ge n_1$. Tomando $m = \max\{n_0, n_1\}$, llegamos a una contradicción ya que por lo anterior se tiene que

$$c < a_m,$$

mientras que por hipótesis se tendría que

$$a_m \le c.$$

Por lo tanto, concluimos que $l \le c$. □

Antes de demostrar la existencia del desarrollo en base b, observemos que las series involucradas son siempre convergentes.

Proposición 2.5. *Sea $b \in \mathbb{N}$, $b \ge 2$, y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de enteros con $0 \le a_n \le b-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$$

converge a un número real $x \in [0,1]$.

Proof. Esta es una serie de términos no negativos, por lo que la sucesión de sumas parciales s_N es creciente. Además, s_N está acotada superiormente:

$$\begin{aligned} s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{b^n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{b-1}{b^n} &= (b-1) \cdot \frac{1}{b} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{b}\right)^n \\ &= \frac{b-1}{b} \cdot \frac{1-(1/b)^N}{1-1/b} \\ &= \frac{b-1}{b} \cdot \frac{b}{b-1}\left(1-\frac{1}{b^N}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{b^N} < 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie converge.

Dado que $0 \leq s_N < 1$ para todo N, por el Ejercicio 2.4 se concluye que

$$0 \leq x = \lim_{N\to\infty} s_N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n} \leq 1.$$

□

Ahora, veamos que todo número real en $[0,1)$ admite al menos un desarrollo en base b.

Teorema 2.6 (Existencia de desarrollo en base b)**.** *Sea $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, y $0 \leq x < 1$ un número real. Entonces existe una sucesión de enteros $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $0 \leq a_n \leq b-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}.$$

Además, la sucesión puede elegirse de modo que $a_n < b-1$ para infinitos n.

Proof. Vamos a construir recursivamente el desarrollo en base b de x.

Sea $x_1 := x$. Puesto que $0 \leq x = x_1 < 1$, si definimos

$$a_1 := [bx_1] \text{ y } x_2 = bx_1 - a_1,$$

se tiene que:

- $0 \leq a_1 < b$, ya que $0 \leq bx_1 < b$,
- $0 \leq x_2 < 1$, al ser $x_2 = bx_1 - [bx_1]$.

Procedemos de la misma forma con x_2. Definimos

$$a_2 := [bx_2] \text{ y } x_3 = bx_2 - a_2,$$

y se tiene que:

$$0 \leq a_2 < b \quad \text{y} \quad 0 \leq x_3 < 1.$$

Similarmente, definimos $a_3, a_4, \ldots$ como

$$a_3 := [bx_3] \in \{0, 1, \ldots, b-1\} \quad \text{y} \quad x_4 = bx_3 - a_3, \quad 0 \leq x_4 < 1,$$

$$a_4 := [bx_4] \in \{0, 1, \ldots, b-1\} \quad \text{y} \quad x_5 = bx_4 - a_4, \quad 0 \le x_5 < 1,$$

$$a_n := [bx_n] \in \{0, 1, \ldots, b-1\} \quad \text{y} \quad x_{n+1} = bx_n - a_n, \quad 0 \le x_{n+1} < 1.$$

Nótese que

$$x = \frac{a_1}{b} + \frac{x_2}{b} = \frac{a_1}{b} + \frac{1}{b} \cdot \left(\frac{a_2}{b} + \frac{x_3}{b} \right) = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \frac{x_3}{b^2}$$

y en general,

$$x = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_n}{b^n} + \frac{x_{n+1}}{b^n}.$$

Si

$$s_n = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_n}{b^n}$$

es la sucesión de sumas parciales, entonces

$$0 \le x - s_n = \frac{x_{n+1}}{b^n} < \frac{1}{b^n}.$$

Concluimos que s_n converge a x, obteniendo así un desarrollo en base b para x,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}.$$

Veamos ahora que este desarrollo en base b no puede tener una cola de $b-1$. De ser así, existiría algún $n_0 \in \mathbb{N}$ para el cual $a_n = b-1$ para todo $n > n_0$. Luego,

$$x - s_{n_0} = x - \sum_{n=1}^{n_0} \frac{a_n}{b^n} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = \frac{b-1}{b^{n_0+1}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{b-1}{b^{n_0+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{b}} = \frac{1}{b^{n_0}}.$$

Sin embargo, se vio que

$$x - s_{n_0} = \frac{x_{n_0+1}}{b^{n_0}} < \frac{1}{b^{n_0}}.$$

Concluimos así lo afirmado. □

Se aprende en el colegio que

$$0,9999999\ldots = 1$$

y que

$$0,123999\ldots = 0,124.$$

Para desarrollos en base b se tiene una situación similar. Si por ejemplo a_1, a_2, a_3 son enteros que satisfacen $0 \le a_i \le b-1$ y $a_3 \neq b-1$, vale que

$$0, a_1a_2a_3(b-1)(b-1)(b-1)\ldots = 0, a_1a_2(a_3+1)0000000\ldots$$

Esto se debe a que

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = (b-1) \cdot \frac{\frac{1}{b^4}}{1-\frac{1}{b}} = \frac{1}{b^3},$$

y en general para cualquier posición en el desarrollo en base b.

Esta es la única forma en la cual un número puede ser descrito con dos desarrollos en base b distintos.

Proposición 2.7 (Caracterización de la no unicidad)**.** *Sea $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de enteros tales que $0 \leq a_n, c_n \leq b-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que estas sucesiones son distintas, pero representan al mismo número real, es decir,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b^n}.$$

Entonces existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

(1) *$a_n = c_n$ para todo $n = 1, \ldots, m_0 - 1$,*
(2) *$|a_{m_0} - c_{m_0}| = 1$,*
(3) *para todo $n > m_0$, una de las sucesiones toma constantemente el valor $b-1$ y la otra el valor 0.*

Proof. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sea

$$m_0 = \min\{m \in \mathbb{N} : a_m \neq c_m\}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $a_{m_0} < c_{m_0}$. De la igualdad de las series, considerando que los primeros $m_0 - 1$ dígitos son iguales, se obtiene que

$$\frac{a_{m_0}}{b^{m_0}} + \sum_{n=m_0+1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n} = \frac{c_{m_0}}{b^{m_0}} + \sum_{n=m_0+1}^{\infty} \frac{c_n}{b^n}.$$

Reordenando,

$$\frac{c_{m_0} - a_{m_0}}{b^{m_0}} = \sum_{n=m_0+1}^{\infty} \frac{a_n - c_n}{b^n}.$$

Como a_{m_0} y c_{m_0} son enteros con $a_{m_0} < c_{m_0}$, se tiene que $c_{m_0} - a_{m_0} \geq 1$. Además, para cada $n > m_0$ se cumple que $a_n - c_n \leq b-1$, ya que $0 \leq a_n, c_n \leq b-1$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{b^{m_0}} \leq \frac{c_{m_0} - a_{m_0}}{b^{m_0}} = \sum_{n=m_0+1}^{\infty} \frac{a_n - c_n}{b^n} \leq \sum_{n=m_0+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = \frac{1}{b^{m_0}}.$$

Por lo tanto, todas las desigualdades son igualdades. En particular, de la igualdad

$$\frac{1}{b^{m_0}} = \frac{c_{m_0} - a_{m_0}}{b^{m_0}}$$

se concluye que

$$c_{m_0} = a_{m_0} + 1.$$

La igualdad

$$\sum_{n=m_0+1}^{\infty} \frac{a_n - c_n}{b^n} = \sum_{n=m_0+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n}$$

implica que

$$\sum_{n=m_0+1}^{\infty} \frac{(b-1) - (a_n - c_n)}{b^n} = 0.$$

Observemos que $a_n - c_n \leq b-1$ para todo n, luego $(b-1) - (a_n - c_n) \geq 0$. Como la serie anterior tiene términos no negativos y suma 0, cada término debe ser cero. Así,

$$(b-1) - (a_n - c_n) = 0 \quad \text{para todo } n > m_0,$$

es decir, $a_n - c_n = b-1$ para todo $n > m_0$.

Finalmente, dado que $0 \leq a_n, c_n \leq b-1$, la igualdad $a_n - c_n = b-1$ solo es posible si

$$a_n = b-1 \quad \text{y} \quad c_n = 0 \quad \text{para todo } n > m_0.$$

De esta forma, en notación del desarrollo en base b,

$$\begin{aligned} x &= 0, a_1 a_2 \dots a_{m_0-1} a_{m_0} (b-1)(b-1)\dots \\ &= 0, a_1 a_2 \dots a_{m_0-1} (a_{m_0}+1) 00 \dots . \end{aligned}$$

□

De ahora en adelante, cuando hablemos del desarrollo en base b de un número real z, nos referiremos al desarrollo en base b obtenido en el Teorema 2.6 aplicado al numero $x = z - [z]$, es decir, aquel que no posee una cola infinita de digitos $b-1$. Esta convención garantiza la unicidad de la representación.

Veamos ahora una observación que seguramente aprendimos en el colegio: al multiplicar un número por 10, "la coma se corre un lugar a la derecha". Esto ocurre de manera análoga para desarrollos en base b.

Sea z un número real con desarrollo en base b igual a

$$N + 0, a_1 a_2 a_3 \dots ,$$

es decir,

$$z = N + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n},$$

donde $N \in \mathbb{Z}$ y los dígitos a_n cumplen $0 \leq a_n \leq b-1$, sin que haya una cola infinita de dígitos $b-1$.

Multiplicando z por b y reordenando, tenemos que

$$b \cdot z = bN + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^{n-1}}, = bN + a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{b^n}.$$

Dado que $bN + a_1 \in \mathbb{Z}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{b^n} \in [0,1)$, por la unicidad de la descomposición en parte entera y parte fraccionaria, junto con la unicidad del desarrollo sin cola infinita de $b-1$, se concluye que:

- La parte entera de $b \cdot z$ es $bN + a_1$.
- El desarrollo en base b de la parte fraccionaria de $b \cdot z$ es $0, a_2 a_3 a_4 \dots$

2.1. **Generalizacion a bases variables.** Vimos que podemos obtener el desarrollo en base b partiendo los intervalos en b subintervalos de igual longitud. Una generalización posible consiste en primero partir el intervalo $[0,1]$ en 2 subintervalos de igual longitud. Una vez identificado el subintervalo que contiene a nuestro elemento, lo partimos en 3 subintervalos de igual longitud; luego, el siguiente subintervalo elegido se parte en 4 partes iguales, y así sucesivamente. Obtendríamos de esta forma una representación de la forma

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2 \cdot 3} + \frac{a_3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{a_n}{2 \cdot 3 \cdots (n+1)} + \cdots$$

con $0 \leq a_n < n+1$ (es decir, $a_1 \in \{0,1\}$, $a_2 \in \{0,1,2\}$, $a_3 \in \{0,1,2,3\}$, etcétera). Un ejemplo conocido de un tal desarrollo es el número e:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Según Niven[1], este es un caso particular de una generalización debida a Cantor[2] que consiste en elegir una sucesión de enteros $b_n \geq 2$ (que dependerán de n) y dividir el intervalo actual de nuestro proceso recursivo en b_n subintervalos de igual longitud. De esta forma se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.8. *Sean $b_1, b_2, b_3, \ldots$ una sucesión de enteros positivos con $b_n \geq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces cada número real x se escribe de manera única en la forma*

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b_1 b_2 \cdots b_i},$$

donde $a_0 \in \mathbb{Z}$ y, para cada $i \geq 1$, a_i es un entero que satisface $0 \leq a_i \leq b_i - 1$, con la condición adicional de que $a_i < b_i - 1$ para infinitos índices i.

Proof. Ver I. Niven, *Irrational numbers*, The Carus Mathematical Monographs, No. 11, Math. Assoc. America, 1956 Wiley, New York, 1956. Teorema 1.6. □

[1] I. Niven, *Irrational numbers*, The Carus Mathematical Monographs, No. 11, Math. Assoc. America, 1956 Wiley, New York, 1956.

[2] G. Cantor, "Ueber die einfachen Zahlensysteme," *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, vol. 14, pp. 121–128 (1869); reimpreso en *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, E. Zermelo, Ed., Berlin: Springer, 1932, pp. 35–42.