SUBESPACIOS SEPARADOS Y CONEXIÓN

Resumen. Definimos la noción de subespacios separados de un espacio métrico y su relación con las desconexiones. Como aplicación probamos el Ejercicio 4 de la práctica 6.

Esta nota está motivada por el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1 (Ejercicio 4, práctica 6). *Sea (X,d) un espacio métrico y sea C un subconjunto de X que no es conexo. Probar que existen $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ abiertos en X disjuntos tales que $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $C \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.*

Para demostrarlo consideraremos la definición de subespacios separados de un espacio métrico y caracterizaremos a las desconexiones de un subespacio en términos de esta definición. Comenzamos primero recordando algunas propiedades de la clausura de un subespacio. Fijamos de ahora en más un espacio métrico (X,d).

1. Generalidades sobre clausuras

Recordemos que la *clausura* de $Z \subset X$ puede describirse como

$$\overline{Z} = \bigcap_{F \supset Z \text{ cerrado}} F.$$

Esta es una noción relativa; dados $Z \subset Y \subset X$ notaremos $\mathrm{cl}_Y(Z)$ a la clausura de Z en Y y reservaremos la notación $\overline{Z}$ para $\mathrm{cl}_X(Z)$.

Observación 2. *Si tenemos subespacios $Z \subset Y \subset X$, entonces $\mathrm{cl}_Y(Z)$ es la intersección de todos los subespacios cerrados de Y que contienen a Z. Recordemos que un cerrado de Y siempre es de la forma $Y \cap F$ con F cerrado en X. Además, como suponemos que $Z \subset Y$, se tiene que $Z \subset Y \cap F$ si y sólo si $Z \subset F$. Se sigue de estas observaciones que*

$$\mathrm{cl}_Y(Z) = Y \cap \mathrm{cl}_X(Z). \tag{1}$$

En efecto,

$$\mathrm{cl}_Y(Z) = \bigcap_{G \supset Z \text{ cerrado en } Y} G = \bigcap_{F \supset Z \text{ cerrado en } X} Y \cap F = Y \cap \bigcap_{F \supset Z \text{ cerrado en } X} F = Y \cap \mathrm{cl}_X(Z).$$

Proposición 3 (Ejercicio 25 (III), práctica 1). *Para cada $A \subset X$ se tiene que*

$$\overline{A} = \{x \in X : d(x,A) = 0\}.$$

□

2. Subespacios separados

Decimos que dos subespacios $A,B \subset X$ están *separados en X* si

$$\overline{A} \cap B = \emptyset, \quad A \cap \overline{B} = \emptyset, \tag{2}$$

y que están *separados por abiertos en X* si existen abiertos $U \supset A$, $V \supset B$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Ejemplo 4. *Los subespacios $B_1((0,0))$ y $B_1((2,0))$ de $\mathbb{R}^2$ están separados.*

Proposición 5. *Si $A,B \subset X$ están separados por abiertos en X, entonces están separados en X.*

Demostración. Si A y B están separados por abiertos disjuntos $U \supset A, V \supset B$, entonces $A \subset U \subset V^c$. Como V^c es cerrado, se sigue que $\overline{A} \subset V^c$. Dado que $B \subset V$, entonces $B^c \supset V^c \supset \overline{A}$; en particular $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Un argumento simétrico muestra que $A \cap \overline{B} = \emptyset$. □

A pesar de que la noción de separación por abiertos aparenta ser más fuerte, ambas condiciones son equivalentes. Para probar este hecho, primero volvemos a probar una de las consecuencias más importantes del Lema de Urysohn.

Lema 6 (Ejercicio 10 práctica 2)**.** *Si $A, B \subset X$ son cerrados disjuntos, entonces están separados por abiertos.*

Demostración. Consideramos la función continua

$$f\colon X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Notar que la función está bien definida pues $A \cap B = \emptyset$ y tanto A como B son cerrados; aquí usamos la Proposición 3. Por el mismo motivo se tiene que $f^{-1}(0) = A$ y $f^{-1}(1) = B$; luego $U = f^{-1}(-\infty, 1/2)$ y $V = f^{-1}(1/2, +\infty)$ separan por abiertos a A y B. □

Teorema 7. *Si $A, B \subset X$ están separados en X, entonces están separados por abiertos en X.*

Demostración. Consideramos $F = \overline{A} \cap \overline{B}$ e $Y = X \setminus F$. Notar que F es cerrado en X, así que Y es abierto en X. En particular todo abierto de Y es abierto en X, así que es suficiente probar que A y B están separados por abiertos en Y.

Veremos más aún que los conjuntos $\mathrm{cl}_Y(A) \supset A$, $\mathrm{cl}_Y(B) \supset B$ están separados por abiertos en Y. Como por definición estos son cerrados de Y, para aplicar el Lema 6 basta ver que son disjuntos. En efecto:

$$\mathrm{cl}_Y(A) \cap \mathrm{cl}_Y(B) \stackrel{(1)}{=} Y \cap \overline{A} \cap Y \cap \overline{B} = Y \cap \overline{A} \cap \overline{B} = Y \cap F = (X \setminus F) \cap F = \emptyset.$$

□

Observación 8. *Podemos dar una demostración más "métrica" del Teorema 7. Dados $A, B \subset X$ separados, consideramos los conjuntos disjuntos*

$$U = \{x \in X : d(x,A) < d(x,B)\}, \quad V = \{x \in X : d(x,A) > d(x,B)\}.$$

Si $x \in A$, entonces por hipótesis $x \notin \overline{B}$. Luego $d(x,B) > 0 = d(x,A)$ y por lo tanto $x \in U$. Del mismo modo se ve que $B \subset V$. Resta ver que U y V son abiertos.

Más en general, si $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ son funciones continuas entonces $O = \{x \in X : f(x) < g(x)\}$ es abierto. Para verlo, notamos que la región $\Delta_\uparrow = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ es abierta en $\mathbb{R}^2$, y que O es la preimgen de $\Delta_\uparrow$ por la función conitnua $(f,g)\colon X \to \mathbb{R}^2$, $(f,g)(x) = (f(x), g(x))$.

3. Desconexiones

Fijemos un subepacio $Y \subset X$. Recordemos que una *desconexión* de Y consiste de un conjunto $\{U, V\}$ de abiertos disjuntos y no vacíos de Y tales que $Y = U \sqcup V$. La condicion de separabilidad entre subespacios caracteriza las desconexiones, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 9. *Sean $Y \subset X$ y $U, V \subset Y$ subespacios no vacíos tales que $Y = U \sqcup V$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) El conjunto $\{U, V\}$ es una desconexión de Y.
(ii) Los subespacios U y V están separados en X.

Demostración. Notamos en primer lugar que

$$\mathrm{cl}_Y(U) = \overline{U} \cap Y = \overline{U} \cap (U \sqcup V) = (\overline{U} \cap U) \sqcup (\overline{U} \cap V) = U \sqcup (\overline{U} \cap V) \tag{3}$$

y de igual modo $\mathrm{cl}_Y(V) = V \sqcup (\overline{V} \cap U)$. Si U y V están separados, entonces $\mathrm{cl}_Y(U) = U$ y $\mathrm{cl}_Y(V) = V$, de modo que ambos son cerrados (y, tomando complementos, también abiertos). Se sigue entonces que $\{U, V\}$ es una desconexión de Y.

Recíprocamente, supongamos que $\{U, V\}$ es una desconexión de Y. En particular tanto U como V son cerrados. Una vez más usando (3), esto implica que $U = U \sqcup (\overline{U} \cap V)$. Como la unión del lado derecho de esta igualdad es disjunta (dado que $U \cap V = \emptyset$) debe ser entonces $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Del mismo modo se obtiene que $U \cap \overline{V} = \emptyset$, lo cual termina de probar que U y V están separados en X. □

Para concluir aplicamos los resultados anteriores para resolver el Ejercicio 4 de la práctica 6.

Corolario 10 (Ejercicio 4, práctica 6)**.** *Sea C un subconjunto de X que no es conexo. Existen $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ abiertos disjuntos de X tales que $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $C \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.*

Demostración. Como C no es conexo, existe una desconexión $\{U, V\}$ de C. Por la Proposición 9 sabemos que U y V están separados en X, así que el Teorema 7 nos asegura que están separados por abiertos en X. Existen entonces $\mathcal{U} \supset U$ y $\mathcal{V} \supset V$ abiertos disjuntos de X. En particular $C = U \sqcup V \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Como $\mathcal{U}$ contiene a U se tiene que $C \cap \mathcal{U} \supset U \neq \emptyset$, y del mismo modo $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Hemos visto entonces que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cumplen lo pedido. □

Observación 11. *Hemos visto a lo largo de la materia que hay muchos argumentos que sólo hacen uso de la topología –es decir, de los abiertos– de X independientemente de la métrica considerada. Hasta el momento, en la presente nota el único resultado que involucra la métrica de X es el Lema 6. Podemos extender estas ideas al contexto más general de los espacios topológicos (*[1, Chapter 2, §12]*), en cuyo caso requerimos que X sea completamente normal; ver* [1, p. 195, Definition] *y* [1, página 203, 6].

Referencias

[1] James R. Munkres, *Topology*, 2nd ed., Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000.