HIPERPLANOS Y ESFERAS

Resumen. Probamos, para todo $n \geq 1$, que toda intersección entre la esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y un hiperplano afín es o bien vacía, o bien un punto, o bien homeomorfa a S^{n-1}. Como aplicación damos una demostración alternativa de que S^n es arcoconexo para todo $n \geq 1$.

Fijemos $n \geq 1$. Un *hiperplano* $H \leq \mathbb{R}^{n+1}$ es un subespacio de dimensión n. Un *hiperplano afín* es un conjunto de la forma

$$H + p = \{h + p : h \in H\}$$

donde H es un hiperplano y $p \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Observación 1. Si $H \leq \mathbb{R}^{n+1}$ es un hiperplano y S es un subespacio complementario de H, entonces todo vector p se escribe como $p = h + s$ con $h \in H$ y $s \in S$ únicos. Se sigue que

$$H + p = (H + h) + s = H + s.$$

El objetivo de esta nota es probar que para todo hiperplano H y $p \in \mathbb{R}^{n+1}$, el conjunto $(H + p) \cap S^n$ es o bien vacío o bien homeomorfo a S^{n-1}. Lo probamos primero para el caso de un hiperlano de la forma

$$X_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = \alpha\} = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle + \alpha e_{n+1}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Lema 2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

(I) Si $\alpha = 1$, entonces $X_\alpha \cap S^n = \{e_{n+1}\}$.
(II) Si $\alpha = -1$, entonces $X_\alpha \cap S^n = \{-e_{n+1}\}$.
(III) Si $|\alpha| > 1$, entonces $X_\alpha \cap S^n = \emptyset$.
(IV) Si $|\alpha| < 1$, entonces $X_\alpha \cap S^n \equiv S^{n-1}$.

Demostración. Un punto $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ pertenece a S^n si $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$. Si además $x \in X_\alpha$, esta ecuación resulta

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 - \alpha^2 \tag{1}$$

y luego

$$X_\alpha \cap S^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 - \alpha^2\} \times \{\alpha\}.$$

En lo que sigue de la prueba veremos, esencialmente, que el primer factor de este producto es vacío, un sólo punto, u homeomorfo a la $(n-1)$-esfera.

Como el lado izquierdo de (1) es no-negativo, para que se satisfaga la ecuación necesariamente $|\alpha| \leq 1$; esto prueba (III). Si $|\alpha| = 1$, entonces $x_1 = \cdots = x_n = 0$ y $x_{n+1} = \alpha = \pm 1$, lo cual prueba (I) y (II).

De aquí en más supongamos que $|\alpha| < 1$. Luego $0 < 1 - \alpha^2 < 1$, por lo cual es posible considerar $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$. Esto permite reescribir (1); diviendo por $1 - \alpha^2 = \beta^2$ obtenemos

$$\left(\frac{x_1}{\beta}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{\beta}\right)^2 = 1.$$

Podemos considerar luego la función

$$f \colon S^{n-1} \to X_\alpha \cap S^n, \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = (\beta x_1, \ldots, \beta x_n, \alpha),$$

que es biyectiva por construcción y continua pues proviene de (co)restringir una función continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$. Como S^{n-1} es compacto, se sigue que f es un homeomorfismo. Esto concluye la prueba del ítem (IV). $\square$

Proposición 3. Si $H \leq \mathbb{R}^{n+1}$ es un hiperplano y $p \in \mathbb{R}^{n+1}$, entonces $S^n \cap (H+p)$ es o bien vacío, o bien un único punto, o bien homeomorfo a S^{n-1}.

Demostración. Consideraremos en $\mathbb{R}^{n+1}$ su producto interno canónico $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_{n+1}y_{n+1}$. Sea $\{v_1,\ldots,v_n\}$ una base ortonormal de H y $H^\perp$ su complemento ortogonal. Como H es un hiperplano, se sigue que $H^\perp$ tiene diemnsión 1; sea $\{w\}$ un generador de norma 1. Notar que $\{v_1,\ldots,v_n,w\}$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$. Por la Observación 1, tenemos que $p = h+\alpha w$ para ciertos $h \in H$, $\alpha \in \mathbb{R}$, y $H+p = H+\alpha w$.

Consideremos a continuación el isomorfismo lineal $T\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ que envía v_i a e_i para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, y w a e_{n+1}. Como T envía una base ortonormal en otra base ortonormal, es de hecho una trasformación ortonormal. En particular T preserva la norma y por lo tanto $T(S^n) = S^n$. Por otro lado,

$$T(H+p) = T(H+\alpha w) = T(H) + \alpha T(w) = \langle e_1,\ldots,e_n\rangle + \alpha e_{n+1} = X_\alpha.$$

Dado que T es un isomorfismo lineal, resulta un homeomorfismo. Se sigue de ello que $S^n \cap (H+p)$ es homeomorfo a $T(S^n) \cap T(H+p) = S^n \cap X_\alpha$. Aplicando el Lema 2 obtenemos la conclusión buscada. $\square$

Corolario 4. Si $n \geq 1$, entonces S^n es arcoconexo.

Demostración. Haremos inducción en n. Si $n = 1$, entonces S^1 es la imagen de la función continua

$$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad g(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)).$$

Como $[0,1]$ es arcoconexo, entonces $g([0,1]) = S^1$ también lo es.

Supongamos ahora que $n \geq 2$ y que S^{n-1} es arcoconexo. Dados $x,y \in S^n$ puntos distintos, consideramos H un hiperplano que los contenga[1]. Como $x,y \in H\cap S^n$, sabemos que $S^n \cap H$ tiene al menos dos puntos. Usando la hipótesis inductiva y aplicando la Proposición 3, obtenemos que el subespacio $S^n \cap H$ es homeomorfo a S^{n-1}. En particular este subespacio resulta arcoconexo y debe existir un arco entre x e y cuya imagen está contenida en $S^n \cap H \subset S^n$. Esto prueba que todo par de puntos de la n-esfera se conecta a través de un arco. $\square$

[1]Explícitamente: podemos extraer una base de $S = \langle x,y\rangle$, extenderla a un conjunto B linealmente independiente de n elementos y tomar $H = \langle B\rangle$.