EJERCICIO 16 PRÁCTICA 7

Ejercicio. *Sean V un espacio normado y $\phi\colon V \to k$ un funcional lineal. Probar que ϕ es continuo si y sólo si* $\ker(\phi)$ *es cerrado.*

Solución. Si φ es continua entonces $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ es cerrado; veamos la recíproca. Si φ es nulo no hay nada que decir; supongamos lo contrario. Sea $F = \ker(\varphi)$ y $v \in V$ tal que $\varphi(v) = 1$. De esta manera $V = F \oplus \langle v \rangle$.

Queremos probar que φ es continua, es decir, que existe $M > 0$ tal que

$$|\varphi(x)| \leq M\|x\|$$

para todo $x \in V$. Un tal x se escribe como $x = f + \lambda v$ con $f \in F$ y $\lambda \in k$ únicos, y $\varphi(x) = \lambda$. Luego lo que queremos probar es que existe $M > 0$ para el cual

$$|\lambda| \leq M\|f + \lambda v\|$$

para todo $\lambda \neq 0$ y $f \in F$. Como F es subespacio, multiplicando por λ^{-1}/M esta desigualdad equivale a

$$1/M \leq \|f + v\|$$

para todo $f \in F$. En otras palabras: alcanza con probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon \leq \|f + v\| \qquad (f \in F)$$

y luego tomar $M = 1/\varepsilon$.

En símbolos: queremos ver que existe ε tal que

$$F + v \subset B_\varepsilon(0)^c;$$

tomando complementos esto es lo mismo que

$$B_\varepsilon(0) \subset (F + v)^c.$$

Por último, como F es cerrado entonces $F + v$ lo es, y $0 \notin F + v$ pues $v \notin F$. Por lo tanto $0 \in (F + v)^c$. Como este último es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(0) \subset (F + v)^c$ como queríamos ver. □