CONSULTAS 19/11

Ejemplo 1 (La norma no siempre se realiza). *Consideremos la norma en* $C[0,1]$ *dada por* $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(s)|ds$*, y el operador lineal*

$$T\colon C[0,1] \to C[0,1], \qquad T(f) = f \cdot id.$$

Es decir $T(f)(x) = f(x) \cdot x$*. Notar que*

$$\|Tf\|_1 = \int_0^1 |f(x)x|dx \leq \int_0^1 |f(x)|dx = \|f\|_1$$

pues $x \leq 1$ *en el dominio de integración. Luego* T *es continua y* $\|T\| \leq 1$*. Más aún, si definimos*

$$g_n(x) = (n+1)x^n,$$

entonces $\|g_n\|_1 = 1$ *y*

$$\|Tg_n\|_1 = (n+1)\int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{n+1}{n+2} \to 1.$$

En consecuencia $\|T\| = 1$*. Sin embargo, la norma no se realiza: veamos que si* $\|f\|_1 = 1$ *entonces* $\|Tf\|_1 < 1$*. Como una tal* f *no es nula, existe* $t \in (0,1)$ *tal que* $f(t) \neq 0$*. Luego, por continuidad, existe un intervalo* $t \in [c,d] \subset (a,b)$ *y una constante* $\varepsilon > 0$ *tal que* $|f(x)| \geq \varepsilon$ *para todo* $x \in [c,d]$*. Se sigue que*

$$\|Tf\|_1 = \int_0^1 |f(x)x|dx = \int_a^c |f(x)x|dx + \int_c^d |f(x)x|dx + \int_d^b |f(x)x|dx \tag{1}$$

$$\leq \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^d |f(x)|xdx + \int_d^b |f(x)|dx. \tag{2}$$

Como $\|f\|_1 = 1$*, tenemos que* $\int_a^c |f(x)|dx + \int_d^b |f(x)|dx = 1 - \int_c^d |f(x)|dx$ *y entonces*

$$\|Tf\|_1 \leq 1 - \int_c^d |f(x)|dx + \int_c^d |f(x)|xdx = 1 - \int_c^d |f(x)|(1-x)dx.$$

Como

$$\int_c^d |f(x)|(1-x)dx \geq \int_c^d \varepsilon(1-d)dx = \varepsilon(1-d)(d-c) =: \mu > 0,$$

entonces $\|Tf\|_1 = 1 - \mu < 1$*.*

Ejercicio 2 (Contraejemplo para el ej. 8 p. 8 cuando X no es compacto). *Sean* $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por* $f_n(x) = x + 1/n$ *y* $f(x) = x^2$*. Luego* $g_n \rightrightarrows id$ *pero*

$$|f \circ g_n(x) - f \circ id| = |(x+1/n)^2 - x^2| = |2x/n + 1/n^2|$$

no tiende a cero de una forma uniforme en x*. Podemos probarlo más concretamente usando el Ejercicio 2 de la práctica 8: si* $x_n = n$*, entonces*

$$|f \circ g_n(x_n) - f \circ id(x_n)| = |2 - 1/n^2| = 2 - 1/n^2 \geq 1.$$

Proposición 3. *Si* E *es un espacio de Banach y* F *un subespacio de dimensión finita, entonces* F *es cerrado.*

Demostración. Sabemos existe un homeomorfismo lineal de F en $\mathbb{R}^n$; en particular es Lipschitz con inversa Lipschitz y como $\mathbb{R}^n$ es completo entonces F también lo es. Luego F es cerrado[1]: toda sucesión $(z_n)_{n\geq 1} \subset F$ convergente en X a cierto $z \in X$ es de Cauchy, y entonces es convergente en F. Por unicidad del límite debe ser $z \in F$. □

Decimos que $f: X \to Y$ es *localmente Lipschitz* si para cada $x \in X$ existe un abierto $U_x \ni x$ tal que $f|_{U_x}$ es Lipschitz.

Ejercicio 4. *Si X es compacto, toda función $f: X \to Y$ localmente Lipschitz es Lipschitz.*

Solución. Sea $\mathcal{U} = (U_x)_{x\in X}$ una colección de abiertos tales que para cada $x \in X$ se tiene que $x \in U_x$ y que $f|_{U_x}$ es Lipschitz con cierta constante $M_x > 0$. Como $\mathcal{U}$ cubre por abiertos a X, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que

$$X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}.$$

Queremos conseguir L tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y). \qquad (\forall x, y \in X).$$

Notemos $U_i := U_{x_i}$, y $M_i = M_{x_i}$. Sabemos que en cada abierto U_i del cubrimiento podemos hacer una tal cota; consideremos entonces $\delta > 0$ un número de Lebesgue para $\{U_1, \ldots, U_n\}$.

Si tenemos puntos $x, y \in X$ a distancia menor que δ, entonces $x, y \in U_i$ para algún i y

$$d(f(x), f(y)) \leq M_i d(x, y) \leq \text{máx}\{M_1, \ldots, M_n\} d(x, y).$$

Ahora consideremos el caso en que $d(x, y) \geq \delta$. Como $f(X)$ es compacto, es acotado; luego podemos considerar $D = \operatorname{diam} f(X)$. Ahora

$$d(f(x), f(y)) \leq D = (D/\delta)\delta \leq (D/\delta) d(x, y).$$

Por lo tanto, si definimos $L = \text{máx}\{D/\delta, M_1, \ldots, M_n\}$, en cualquiera de los posibles casos

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y).$$

Esto termina de probar que f es Lipschitz. □

[1] En general, ya hemos visto que si $Y \subset X$ son espacios métricos, e Y es completo, es cerrado en X. Repetimos la misma aquí la misma demostración.