

1	2	3	4	5	Nota

NOMBRE Y APELLIDO:

CÁLCULO AVANZADO  
SEGUNDO CUATRIMESTRE 2024  
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

---

**Ejercicio 1.** Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando una demostración o exhibiendo un contraejemplo según el caso.

- (a) Un espacio métrico  $(X, d)$  es compacto si y sólo si toda sucesión en  $X$  tiene una subsucesión de Cauchy.
- (b) Si  $X$  es un espacio métrico y  $U_1, \dots, U_k$  son subespacios abiertos, no vacíos y conexos tales que  $X = U_1 \sqcup \dots \sqcup U_k$ , entonces el conjunto de componentes conexas de  $X$  es  $\{U_1, \dots, U_k\}$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Consideremos una función continua  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión en  $(C(X), d_\infty)$ . Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (I) para cada  $p \in X$ , existe un abierto  $U \ni p$  de  $X$  tal que  $\{(f_n)|_U\}_{n \geq 1}$  converge uniformemente a  $f|_U$ .
- (II) la sucesión  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformemente a  $f$ .

**Ejercicio 3.** Pruebe que los siguientes subespacios de  $\mathbb{R}^2$  no son homeomorfos entre sí.

- (I)  $A = \{(t, t) : t \in [-1, 1]\} \cup \{(t, -t) : t \in [-1, 1]\}$ ;
- (II)  $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) : (x - 2)^2 + y^2 = 1\}$ .

**Ejercicio 4.** Pruebe que el operador lineal  $T: c_0 \rightarrow \ell^1$  dado por

$$T((x_n)_{n \geq 1}) = \left( \frac{x_n}{2^n} \right)_{n \geq 1} = (x_1/2, x_2/4, x_3/8, \dots)$$

es continuo y halle  $\|T\|$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $(f_n)_{n \geq 1} \subset C([0, 1])$  una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente y sea  $f \in C([0, 1])$  su límite. Supongamos además que cada función  $f_n$  es de clase  $C^1$ , y que  $(f'_n)_{n \geq 1}$  converge uniformemente a cierta función  $g \in C([0, 1])$ . Pruebe que  $f$  es derivable y que  $f' = g$ .

*Sugerencia: recuerde el teorema fundamental del cálculo.*

---

*Justifique todas sus respuestas.*

*Si utiliza un ejercicio de la guía, consulte si lo tiene que demostrar o no.*