Cálculo Avanzado
Segundo cuatrimestre 2024
Soluciones del segundo examen parcial

Ejercicio 1. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando una demostración o exhibiendo un contraejemplo según el caso.

(a) Un espacio métrico (X,d) es compacto si y sólo si toda sucesión en X tiene una subsucesión de Cauchy.

(b) Si X es un espacio métrico y $U_1,\ldots,U_k$ son subespacios abiertos, no vacíos y conexos tales que $X = U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_k$, entonces el conjunto de componentes conexas de X es $\{U_1,\ldots,U_k\}$.

Solución.

a) **Falso.** Las afirmaciones no son equivalentes: hay espacios en que toda sucesión tiene una subsucesión de Cauchy, pero no son completos. Por ejemplo, el espacio $X = [0,1)$ no es compacto pues no es completo. Sin embargo, una sucesión $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ es una sucesión de números reales acotada. Por el teorema Bolzano-Weierstraß, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge en $\mathbb{R}$ y es particular es de Cauchy.

b) **Verdadero.** Sea C una componente conexa de X y $x \in C$. Tomemos $i \in \{1,\ldots,k\}$ tal que $U_i \ni x$. Notemos $V_i = \bigcup_{j\neq i} U_j$. Así,

$$C \subset X = U_i \sqcup V_i,$$

y como esta es una unión disjunta de dos abiertos, entonces C debe estar completamente contenido en alguno de ellos[1]. Como $C \cap U_i$, entonces debe ser $C \subset U_i$. Dado que C es una componente conexa, es un conexo maximal, y por lo tanto $C = U_i$.

Esto dice que toda componente conexa es de la forma U_i para algún i. La recíproca también es cierta: si tomamos U_i y x un punto allí, acabamos de probar que la componente conexa de x es U_i; en particular U_i es una componente conexa.

□

Ejercicio 2. Sea X un espacio métrico compacto. Consideremos una función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ y $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $(C(X), d_\infty)$. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) para cada $p \in X$, existe un abierto $U \ni p$ de X tal que $\{(f_n)|_U\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f|_U$.

(II) la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f.

Solución.

- $(II) \Rightarrow (I)$. Tomamos $U := X$ para cada $p \in X$.

[1] Aquí se puede citar el Ej. 3 de la práctica de conexión. Lo demostramos: si $C \subset X$ es conexo y $C \subset A \sqcup B$ con A,B abiertos, entonces $C = (A\cap C) \sqcup (B \cap C)$. Como esto no puede ser una desconexión de C, alguno de estos dos abiertos debe ser vacío, lo cual solo ocurre si C está contenido totalmente en A o contenido totalmente en B.

- $(I) \Rightarrow (II)$. Para cada $p \in X$, usando (I) tenemos un abierto $U_p \ni p$ donde la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f. Como $(U_p)_{p\in X}$ cubre por abiertos a X, por compacidad existen $p_1,\ldots,p_k \in X$ tal que

$$X = U_{p_1} \cup \cdots \cup U_{p_k}. \tag{1}$$

Veamos que $f_n \rightrightarrows f$. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $j \geq 1$, existe $n_j \geq 1$ tal que $n \geq n_j$ implica

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \qquad (\forall x \in U_{p_j}).$$

Si tomamos $N = \text{máx}\{n_1,\ldots,n_k\}$, entonces usando (1) tenemos que

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \qquad (\forall x \in X)$$

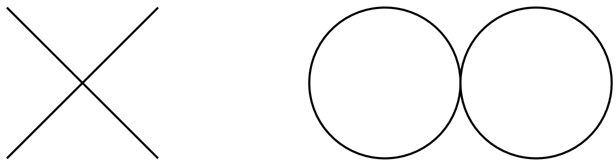
como queríamos probar.

$\square$

Ejercicio 3. Pruebe que los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$ no son homeomorfos entre sí.

(I) $A = \{(t,t) : t \in [-1,1]\} \cup \{(t,-t) : t \in [-1,1]\}$;

(II) $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) : (x-2)^2 + y^2 = 1\}$.



Damos dos soluciones distintas.

Solución 1. Supongamos que existe un homeomorfismo $h\colon A \to B$. Sea[2] $0 < \alpha < 1$ tal que $h(\alpha,\alpha) \neq (1,0)$. Sea $p = h(\alpha,\alpha)$. Tenemos entonces, (co)restringiendo h, un homeomorfismo entre $A \setminus \{(\alpha,\alpha)\}$ y $B \setminus \{p\}$. Veremos que esto es absurdo probando que el primer espacio es disconexo y el segundo conexo.

Empezamos por $B \setminus \{p\}$; consideremos $C_1 = S^1$ y $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 = 1\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $p \in C_1$, de manera que

$$B \setminus \{p\} = (C_1 \setminus \{p\}) \cup C_2.$$

Los uniendos corresponden a un círculo o a quitarle un punto a un círculo, observamos en clase que en ambos casos resultan arcoconexos. Como la intersección entre los uniendos es $\{(1,0)\}$, en particular es no vacía, así que $B \setminus \{p\}$ es (arco)conexo.

Por último, para desconectar a $A \setminus \{(\alpha,\alpha)\}$ consideraremos la recta $y = 2\alpha - x$, que es la recta perpendicular a $y = x$ que pasa por (α,α), y veremos los semiplanos que estan por encima y por debajo de la recta[3].

En concreto, viendo a $A \setminus \{(\alpha,\alpha)\}$ como subespacio de $\mathbb{R}^2$, esta contenido en la unión disjunta de dos abiertos:

$$A \setminus \{(\alpha,\alpha)\} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 2\alpha - x\} \sqcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 2\alpha - x\}.$$

Como $(1,1) \in A \setminus \{(\alpha,\alpha)\}) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 2\alpha - x\}$ y $(0,0) \in A \setminus \{(\alpha,\alpha)\}) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 2\alpha - x\}$, hemos exhibido una desconexión[4] explícita de A. $\square$

[2] Por ejemplo: o bien $h(1/2,1/2) \neq (1,0)$, o en caso contrario podemos tomar $\alpha = 1/4$. Aquí usamos que h es inyectiva.

[3] Se sugiere hacer un dibujo.

[4] Una vez más, ver Ej. 3 de la práctica.

Solución 2. Supongamos que existe un homeomorfismo $h\colon A \to B$. Existiría entonces un homeomorfismo $h|\colon A \setminus \{(0,0)\} \to B \setminus \{h(0,0)\}$. Afirmamos que

i) $A \setminus \{(0,0)\}$ tiene exactamente cuatro componentes conexas.

ii) $B \setminus \{p\}$ con $p \in B$ tiene una o dos componentes conexas.

Habiendo probado i) y ii), habremos llegado a un absurdo –pues los homeomorfismos preservan la cantidad de componentes conexas– y con ello habremos probado lo pedido.

i) Notemos que $A \setminus \{(0,0)\}$ es la unión disjunta de los siguientes subespacios:

$$L_1 = \{(x,-x) : x \in [-1,0)\}, \qquad L_2 = \{(x,-x) : x \in (0,1]\},$$
$$L_3 = \{(x,x) : x \in [-1,0)\}, \qquad L_4 = \{(x,x) : x \in (0,1]\}.$$

Cada uno de ellos es conexo pues es la imagen de un intervalo de $\mathbb{R}$ a través de una función continua. Además, son abiertos en $A \setminus \{(0,0)\}$, ya que cada uno de ellos puede escribirse como la intersección entre este último espacio y un abierto de $\mathbb{R}^2$ (en concreto, un cuadrante abierto del plano):

$$\begin{aligned}
L_1 &= (A \setminus \{(0,0)\}) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0\},\\
L_2 &= (A \setminus \{(0,0)\}) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0\},\\
L_3 &= (A \setminus \{(0,0)\}) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0\},\\
L_4 &= (A \setminus \{(0,0)\}) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}.
\end{aligned}$$

Ahora sí, el argumento del ejercicio 1)b) nos dice que estas son exactamente las componentes conexas de $A \setminus \{(0,0)\}$. Notar que **no alcanza con decir que este espacio es unión de cuatro conexos** (por ejemplo $[0,1]$ es conexo pero es unión de dos conexos disjuntos, e.g.: $[0,1/2) \sqcup [1/2,1]$).

ii) Consideremos $C_1 = S^1$ y $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 = 1\}$. Separamos en dos casos, según si $p = (1,0)$ o no. El caso $p \neq (1,0)$ fue considerado en la solución anterior. Si $p = (1,0)$, entonces

$$B \setminus \{p\} = (C_1 \setminus \{p\}) \sqcup (C_2 \setminus \{p\})$$

Estos uniendos son abiertos en $B \setminus \{p\}$, pues corresponden a intersecar este último espacio con los semiplanos abiertos $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x < 1\}$ y $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 1\}$ respectivamente. Además, como corresponden a quitarle un punto a un círculo, observamos en clase que resultan arcoconexos. Esto muestra que $\{C_1 \setminus \{p\}, C_2 \setminus \{p\}\}$ son las componentes conexas de $B \setminus \{p\}$.

$\square$

Ejercicio 4. Pruebe que el operador lineal $T\colon c_0 \to \ell^1$ dado por

$$T((x_n)_{n\geq 1}) = \left(\frac{x_n}{2^n}\right)_{n\geq 1} = (x_1/2, x_2/4, x_3/8, \dots)$$

es continuo y halle $\|T\|$.

Solución. Dado $x \in c_0$, tenemos que

$$\|Tx\|_1 = \sum_{i\geq 1} \frac{|x_i|}{2^i} \leq \sum_{i\geq 1} \frac{\|x\|_\infty}{2^i} = \|x\|_\infty \cdot \overbrace{\left(\sum_{i\geq 1} \frac{1}{2^i}\right)}^{=1} = \|x\|_\infty.$$

Por lo tanto T es continua y $\|T\| \leq 1$. Veremos que la norma es exactamente 1 construyendo una sucesión de elementos $(y^k)_{k\geq 1} \subset c_0$ tal que $\|T(y^k)\|_1 \to 1$. Si definimos

$$y_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

entonces $y_k \in c_0$, $\|y^k\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |y_n^k| = \sup\{0,1\} = 1$ y

$$\|T(y^k)\|_1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \xrightarrow{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

□

Ejercicio 5. Sea $(f_n)_{n\geq 1} \subset C([0,1])$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente y sea $f \in C([0,1])$ su límite. Supongamos además que cada función f_n es de clase C^1, y que $(f_n')_{n\geq 1}$ converge uniformemente a cierta función $g \in C([0,1])$. Pruebe que f es derivable y que $f' = g$.
Sugerencia: *recuerde el teorema fundamental del cálculo.*

Demostración. Hacemos algunas observaciones previas. El teorema fundamental del cálculo, al menos en una de sus versiones, nos dice que si tenemos una función continua $h \in C([0,1])$ entonces la función

$$H(x) = \int_0^x h(t)dt$$

es derivable con derivada $h(t)$. En particular, si $k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ es derivable, entonces tiene la misma derivada que

$$K(x) = \int_0^x k'(t)dt.$$

Por lo tanto k y K difieren en una constante, $k \equiv K + c$. Evaluando en $x = 0$ se obtiene que la constante es $c = k(0)$, y así

$$k(x) = k(0) + \int_0^x k'(t)dt.$$

En particular para cada $n \geq 1$ tenemos que

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(t)dt.$$

Como $f_n \rightrightarrows f$, tenemos convergencia puntual en todo $x \in [0,1]$, en particular en 0. Por otro lado, como $f_n' \rightrightarrows g$, tenemos convergencia de sus integrales en $[0,x]$. se obtiene así que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f_n(0) + \int_0^x f_n'(t)dt \right) = f(0) + \int_0^x g(t)dt.$$

Es decir, que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)dt.$$

Por lo observado al comienzo del ejercicio, esto nos permite concluir que f es una función derivable con derivada g. □