1	2	3	4	5	Nota

Nombre y apellido:

Cálculo Avanzado

Segundo cuatrimestre 2024

Primer examen parcial

Ejercicio 1. Sea (X,d) un espacio métrico y $\mathscr{B}$ una base de su topología.

(i) Pruebe que si $x,y \in X$ son puntos distintos, entonces existe $U \in \mathscr{B}$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

(ii) Pruebe que $\#X \leq 2^{\#\mathscr{B}}$.

(iii) Deduzca que si X es separable, entonces $\#X \leq c$.

Ejercicio 2. Sea (X,d) un espacio métrico. Un subespacio $S \subset X$ se dice *ultramétrico* si $d(x,y) \leq \text{máx}\{d(x,z), d(z,y)\}$ para todo $x,y,z \in S$. Pruebe que si $D \subset X$ es un subespacio denso y ultramétrico, entonces X es ultramétrico.

Ejercicio 3. Consideremos la métrica en $M_2\mathbb{R}$ dada por $d_\infty(A,B) = \text{máx}_{1\leq i,j\leq 2} |A_{ij} - B_{ij}|$.

(a) Pruebe que $GL_2\mathbb{R} = \{A \in M_2\mathbb{R} : A \text{ es inversible}\}$ es abierto en $M_2\mathbb{R}$.

(b) Pruebe que $\{A \in M_2\mathbb{R} : A + A^{t} \text{ es inversible}\}$ es abierto en $M_2\mathbb{R}$.

Ejercicio 4. Sea (X,δ) un espacio métrico finito, $Y = X^{\mathbb{N}}$ y

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta(x_n,y_n)}{n^2}.$$

Pruebe que d es una métrica y que (Y,d) es un espacio métrico completo.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función infinitamente derivable. Pruebe que si para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{(n(x))}(x) = 0,$$

entonces existe un intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ y un polinomio $p \in \mathbb{R}[X]$ tal que

$$f(x) = p(x) \qquad \forall x \in (a,b).$$

Justifique todas sus respuestas. Si utiliza un ejercicio de la guía, consulte si lo tiene que demostrar o no.