# Cálculo Avanzado

Segundo cuatrimestre – 2024

Práctica 8

**Sucesiones de funciones**

---

**Ejercicio 1.**

(I) En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ dado:

*a*) $A = (-1,1]$, $f_n(x) = x^n$;

*b*) $A = (1,+\infty)$, $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$;

*c*) $A = [0,1]$, $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$.

(II) Demostrar que la sucesión de (a) converge uniformemente en $B = (0,\frac{1}{2})$. ¿Es uniforme la convergencia en $(-1,1]$?

(III) Demostrar que la sucesión de (b) converge uniformemente en $B = [2,5]$. ¿Es uniforme la convergencia en $(1,2)$? ¿Y en $(2,+\infty)$?

(IV) Demostrar que para la sucesión de (c) existe $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ pero el mismo no coincide con la integral del límite puntual.

**Ejercicio 2.** Sean $X$ un espacio métrico y $A$ un conjunto. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $A$ en $X$ y sea $f\colon A \to X$. Probar que: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **no** converge uniformemente a $f$ sobre $A$ si y solamente si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $A$ tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

**Ejercicio 3.** Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

(I) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

(II) $f_n(x) = \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

(III) $f_n(z) = \dfrac{n}{n+1}z$, $z \in \mathbb{C}$.

(IV) $f_n(z) = nz^2$, $z \in \mathbb{C}$.

(V) $f_n(z) = z^n$, en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

**Ejercicio 4.** Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{x^3}{1+nx^2}$ converge puntualmente pero no uniformemente, en $\mathbb{R}$, a una función continua.

**Ejercicio 5.** Sea $X$ un conjunto y sea $B(X) = \{g : X \to \mathbb{C} : g \text{ es acotada}\}$. Consideremos una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X)$.

(I) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función $f$ en $X$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

(II) Probar que:

*a*) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función $f$ en $X$, entonces $f \in B(X)$.

*b*) La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f$ si y sólo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f$ en $(B(X), d_\infty)$.

*c*) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $X$, entonces existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada.

**Ejercicio 6.** Sea $X$ un espacio métrico, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de $X$ en $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua.

(I) Probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f$, entonces para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ que converge a $x \in X$ se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

(II) Probar que si $X$ es compacto, y para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ que converge a $x \in X$ se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$, entonces $f_n$ converge uniformemente a $f$.

**Ejercicio 7.** Sea $X$ un conjunto y sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de funciones de $X$ en $\mathbb{R}$ que convergen uniformemente sobre $X$.

(I) Probar que $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre $X$.

(II) Probar que si las funciones $f_n$ y $g_n$ son acotadas, entonces $(f_n \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre $X$.

(III) Mostrar con un ejemplo que el resultado anterior no es cierto si se permite que las funciones $g_n$ no estén acotadas.

**Ejercicio 8.** Sean $X$ un espacio métrico compacto y $A$ un conjunto. Probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas de $X$ en $\mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f\colon X \to \mathbb{R}$, y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función $g : A \to X$, entonces la sucesión $(f_n \circ g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de $A$ en $\mathbb{R}$ converge uniformemente a $f \circ g$. Mostrar con un ejemplo que el resultado anterior no es cierto si se omite la hipótesis de $X$ compacto.

**Ejercicio 9.** Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$ y $f_n'$ en $[-1, 1]$.

**Ejercicio 10.** Sean $X$ e $Y$ espacios métricos. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones de $X$ en $Y$ es *equicontinua* en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x_0) < \delta$ implica

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \qquad (\forall f \in \mathcal{F}).$$

(I) Probar que cualquier familia finita de funciones de $X$ en $Y$ continuas en $x_0 \in X$ es equicontinua en $x_0$.

(II) Sea $B(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones de $X$ en $Y$ que son acotadas. Probar que si $\mathcal{F} \subseteq B(X, Y)$ es una familia equicontinua, entonces $\overline{\mathcal{F}}$ también es equicontinua.

(III) Probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas de $X$ en $Y$ que converge uniformemente en $X$, entonces $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia equicontinua.

Supongamos desde ahora que $X$ es compacto.

(IV) Probar que si $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua de funciones de $X$ en $Y$, entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua.

(V) Probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones de $X$ en $Y$ uniformemente equicontinua que converge puntualmente a $f\colon X \to Y$, entonces esa convergencia es uniforme en $X$.

**Ejercicio 11.** Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ integrables y uniformemente acotadas, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(s)ds.$$

para cada $x \in [a,b]$. Probar que la sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión que converge uniformemente sobre $[a,b]$.

**Ejercicio 12.** Sea $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\int_0^1 f(x)\ x^n\ dx = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $f \equiv 0$ en $[0,1]$.
***Sugerencia:*** *Usar el Teorema de Stone-Weierstraß.*

**Ejercicio 13.** Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ tales que $f_n \rightrightarrows f$. Decidir si vale la siguiente afirmación:

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)dx.$$

**Ejercicio 14** (criterio de Weierstraß)**.** Sean $(V,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $X$ un conjunto. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $X$ en $V$. Probar que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales positivos tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $\|f_n(x)\| \leq a_n$ para cualesquiera $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente.

**Ejercicio 15.** Hallar los conjuntos de $\mathbb{R}$ de convergencia puntual, uniforme y no convergencia de las siguientes series:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n\ ;\quad b)\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n\ ;\quad c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ ;\quad d)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

**Ejercicio 16** (función zeta de Riemann)**.** Consideramos la función dada por la serie:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Probar que la serie converge uniformemente en cada intervalo $(1+\varepsilon, +\infty)$ hacia una función continua.