# Cálculo Avanzado

Segundo cuatrimestre – 2024

Práctica 7

**Espacios normados**

---

A lo largo de la práctica, la letra $k$ denotará el cuerpo $\mathbb{R}$ de números reales ó $\mathbb{C}$ de números complejos.

**Ejercicio 1.** Probar que cada uno de los siguientes es un espacio normado sobre $\mathbb{R}$, y decidir si es un espacio de Banach.

(I) $\ell^1 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$, con $||(x_n)_{n\geq 1}|| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

(II) $\ell^1$ con $||(x_n)|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

(III) $C[a,b]$ con $||f|| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

(IV) $C^1[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f$ es de clase $C^1\}$ con $||f|| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

**Ejercicio 2.** Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Probar las siguientes afirmaciones:

(I) la función $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ es continua;

(II) las operaciones $+\colon V\times V \to V$ y $\cdot\colon k\times V \to V$ son funciones continuas;

(III) $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$;

(IV) $(\overline{B}(x,r))^\circ = B(x,r)$;

(V) $\operatorname{diam}(B(x,r)) = 2r$, si $V \neq 0$.

**Ejercicio 3.** Sea $V$ un $k$-espacio vectorial y sea $d : V\times V \to \mathbb{R}$ una métrica que satisface:

(I) $d(x+z, y+z) = d(x,y) \qquad \forall\, x,y,z \in V$,

(II) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y) \qquad \forall\, x,y \in V \quad \forall\, \lambda \in k$.

Se define $N : V \longrightarrow \mathbb{R}$ como $N(x) = d(0,x)$. Probar que $N$ es una norma en $V$ y verificar que la distancia inducida por $N$ es $d$.

**Ejercicio 4.** Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset V$. Decimos que $C$ es *convexo* si para todo $x,y \in C$ y $t \in [0,1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in C$.

(I) Probar que toda bola abierta es convexa.

(II) Probar que si $C$ es convexo, entonces $C^\circ$ y $\overline{C}$ también lo son.

(III) Probar que si $(C_i)_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos convexos de $V$, entonces $\bigcap_{i\in I} C_i$ es convexo. Deducir que dado un subconjunto $A \subset V$, existe un único conjunto convexo minimal (respecto de la inclusión) que lo contiene. Este conjunto se llama la *cápsula convexa* de $A$, y lo notamos $\operatorname{Conv}(A)$.

(IV) Probar que si $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es un subconjunto finito de $V$, entonces

$$\mathrm{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : a_i \geq 0 \text{ para todo } i, \ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\}.$$

**Ejercicio 5.** Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subset V$ un subespacio vectorial. Probar que:

(I) $\overline{S}$ es un subespacio vectorial;

(II) si $S \neq V$, entonces $S^\circ = \emptyset$.

**Ejercicio 6.** Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge* si existe $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i$, y decimos que *converge absolutamente* si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge en $\mathbb{R}$.

(I) Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, entonces $x_n \to 0$.

(II) Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente y $V$ es de Banach, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

**Ejercicio 7.** Dado un $k$-espacio vectorial $V$, un subespacio vectorial $H \subset V$ se dice un *hiperplano* si existe $x \in V \setminus 0$ tal que $H \oplus \langle x \rangle = V$.

(I) Probar que si $H$ es un hiperplano, entonces para todo $y \in V \setminus H$ se tiene que $H \oplus \langle y \rangle = V$.

(II) Probar que $H$ es un hiperplano si y sólo si existe $\phi \colon V \to k$ lineal no nula tal que $H = \ker(\phi)$.

(III) Probar que si $V$ es un espacio normado y $H$ es un hiperplano, entonces $H$ es o bien cerrado o bien denso en $V$.

**Ejercicio 8.** Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperplanos.

(I) $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ \exists \lim_{n\to\infty} x_n\} \subset \ell^\infty$.

(II) $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \to 0\} \subset c$.

(III) $\{x \in \ell^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset \ell^1$.

(IV) $\mathbb{R}[X] \subset C[0,1]$.

**Ejercicio 9.** Sean $V$ y $W$ espacios normados. Sea $T \colon V \to W$ un operador lineal. Probar que son equivalentes:

(I) $T$ es continuo en 0;

(II) existe $x_0 \in v$ tal que $T$ es continuo en $x_0$;

(III) $T$ es continuo;

(IV) $T$ es uniformemente continuo;

(V) existe $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in V$;

(VI) para todo $A \subset V$ acotado, $T(A)$ es acotado.

**Ejercicio 10.** Sean $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ espacios normados. Consideramos $L(V,W) := \{T : V \to W : T \text{ es lineal y continua}\}$, y para cada $T \in L(V,W)$ sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|T(x)\|_W.$$

Probar que:

(I) $(L(V,W), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

(II) Si $W$ es de Banach entonces $L(V,W)$ también lo es.

**Ejercicio 11.** Sean $V$ y $W$ espacios normados y sea $T\colon V \to W$ un operador lineal y continuo. Verificar la siguiente igualdad:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x\}.$$

**Ejercicio 12.** Sean $V_1, V_2$ y $V_3$ espacios normados, y sean $f\colon V_1 \longrightarrow V_2$ y $g\colon V_2 \longrightarrow V_3$ operadores lineales continuos. Probar que $\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$.

**Ejercicio 13.** Sean $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ el espacio normado formado por todos los polinomios con coeficientes reales con la norma $\|p\| = \sup\{|p(x)| : x \in [0,1]\}$, y $\mathrm{ev}_3\colon \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathrm{ev}_3(p) = p(3)$. Probar que $\mathrm{ev}_3$ es lineal pero no continua.

**Ejercicio 14.** Sean $S, T\colon \ell^1 \to \ell^1$ definidos por

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots), \qquad T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Probar que $S, T \in L(\ell^1)$ y calcular sus normas.

**Ejercicio 15.** Sea $c$ es el subespacio de $\ell^\infty$ dado por las sucesiones convergentes, y sea $T\colon c \to \mathbb{R}$ dada por $T(a) = \lim_{n\to\infty} a_n$. Probar que $T$ es lineal y continuo y hallar $\|T\|$.

**Ejercicio 16.** Sean $V$ un espacio normado y $\phi\colon V \to k$ un funcional lineal. Probar que $\phi$ es continuo si y sólo si $\ker(\phi)$ es cerrado.

**Ejercicio 17.** Sea $V$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que no puede tener una base algebraica numerable.