Cálculo Avanzado

Segundo cuatrimestre – 2024

Práctica 6

Conexión

Ejercicio 1. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son conexos:

$$\mathbb{N}; \qquad [0,1); \qquad \mathbb{Q}; \qquad \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Ejercicio 2. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones en un espacio métrico arbitrario (X,d). Pensar además si las que son falsas se vuelven verdaderas cuando el espacio es $\mathbb{R}^n$.

i) Toda bola abierta $B(a,r)$ es conexa.

ii) Para todo $a \in X$, existe $r > 0$ tal que la bola $B(a,r)$ es conexa.

iii) Si $A,B \subset X$ son conexos entonces $A \cup B$ es conexo.

iv) Si $A,B \subset X$ son conexos entonces $A \cap B$ es conexo.

v) Si $A,B \subset X$ son conexos entonces $A \setminus B$ es conexo.

vi) Si $A \subset X$ es conexo y x es un punto de acumulación de A, entonces $A \cup \{x\}$ es conexo.

vii) Si $A \subset X$ es conexo, entonces A° es conexo.

viii) Si $A \subset X$ es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.

Ejercicio 3. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $C \subset X$. Probar que son equivalentes:

i) No existen U,V abiertos en C, no vacíos y disjuntos tales que $C = U \cup V$.

ii) No existen $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ abiertos en X tales que $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ y $C \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

iii) Si $A \subset C$ es no vacío y abierto y cerrado en C, entonces $A = C$.

Ejercicio 4. Sea (X,d) un espacio métrico y sea C un subconjunto de X que no es conexo. Probar que existen $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ abiertos en X **disjuntos** tales que $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $C \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

Ejercicio 6. Probar que un espacio métrico (X,d) es conexo si y sólo si toda función continua $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ es constante.

Ejercicio 7. Probar que si $n \geq 2$ no existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 8. Probar que los espacios métricos $(0,1)$, $[0,1)$ y $[0,1]$ son dos a dos no-homeomorfos.

Ejercicio 9. Sea (X,d) un espacio métrico conexo y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a,b \in f(X)$ tales que $a \leq b$. Probar que para todo $c \in [a,b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$.

Ejercicio 10. Probar que si (X,d) es conexo, entonces $\#X = 1$ ó $\#X \geq c$.

Ejercicio 11. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que las componentes conexas de X son cerradas. ¿Son abiertas?

Ejercicio 12. Sean (X,d) un espacio métrico arcoconexo, (Y,d') un espacio métrico y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Probar que el conjunto $f(X)$ es arcoconexo.

Ejercicio 13. Probar que $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ no es homeomorfo a $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

Ejercicio 14. Sea $n \geq 2$ y sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto contable. Probar que $\mathbb{R}^n \setminus S$ es arcoconexo.

Ejercicio 15. Un espacio métrico (X,d) se dice *localmente conexo* (resp. *localmente arcoconexo*) si para todo $x \in X$ y para todo $U \subset X$ entorno de x, existe un entorno conexo (resp. arcoconexo) V de x tal que $x \in V \subset U$. Probar que:

I) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces A es conexo si y sólo si es arcoconexo.

II) Un espacio métrico X es localmente (arco)conexo si y sólo si para todo U abierto de X, las componentes (arco)conexas de U son abiertas.

III) Todo espacio métrico conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.

IV) En un espacio métrico localmente arcoconexo todo conjunto abierto y conexo es arcoconexo.

V) Las componentes arcoconexas de un espacio localmente arcoconexo son abiertas.

Ejercicio 16. Sean $C = \{(t, \text{sen}(1/t)) : 0 < t \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ y $X = \overline{C} = C \cup (\{0\} \times [-1,1])$ el *seno del topólogo*.

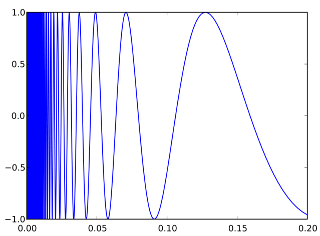

Figura 1: El espacio X.

I) Muestre que C es arco-conexo y deduzca que X es conexo.

II) Muestre que sin embargo X no es arco-conexo. Para verlo, puede suponer que existe un arco continuo $\gamma \colon [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = (0,0)$ y $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$ y obtener una contradicción del siguiente modo:

   a) Recuerde que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $x, y \colon [0,1] \to X$ dos funciones continuas.

   b) Pruebe que existe $t_1 \in (0,1)$ tal que $x(t) = \frac{2}{3\pi}$ e, inductivamente, construya una sucesión decreciente $(t_n)_{n\geq 1} \subset [0,1]$ tal que $x(t_n) = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   c) Observe que $(t_n)_{n\geq 1}$ es convergente a cierto límite $\ell \in [0,1]$ pero sin embargo la sucesión $(y(t_n))_{n\geq 1}$ no converge, contradiciendo la continuidad de y.