Cálculo Avanzado

Segundo cuatrimestre – 2024

Práctica 5

Compacidad

Ejercicio 1. Sea X un espacio métrico. Consideremos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión convergente y notemos $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ a su límite. Probar que el subespacio $K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\} \subset X$ es compacto.

Ejercicio 2.

(I) Mostrar que el intervalo $(0,1] \subset \mathbb{R}$ no es compacto.

(II) Sean $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $S = (a,b) \cap \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado de $(\mathbb{Q}, d)$, donde d es la métrica usual de $\mathbb{R}$, pero no es compacto.

Ejercicio 3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $e^{(n)} \in \ell^\infty$ como

$$e_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ 1 & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

Probar que $E = \{e^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^\infty$ es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

Ejercicio 4. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Pruebe que la bola cerrada

$$\overline{B}(0,1) = \left\{ y \in c_0 : \sup_{n\geq 1} |y_n| \leq 1 \right\}$$

no es compacta.

Ejercicio 5. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que:

(I) Si (X,d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.

(II) Toda unión finita y toda intersección arbitraria de subconjuntos compactos de X es compacta.

(III) Un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$.

Ejercicio 6. Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que una familia $(F_i)_{i\in I}$ de subconjuntos de X tiene la *propiedad de intersección finita* si cualquier subfamilia finita de $(F_i)_{i\in I}$ tiene intersección no vacía. Probar que X es compacto si y sólo si toda familia $(F_i)_{i\in I}$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

Ejercicio 7. Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

Ejercicio 8. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Consideremos la métrica en $X \times Y$ dada por

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X,d) e (Y,d') son compactos.

Ejercicio 9. Sea X un espacio métrico compacto y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in X$. Probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq \varepsilon$ para todo $x \in X$.

Ejercicio 10. Sea (X,d) un espacio métrico.

(I) Sean $F \subset X$ cerrado y $x \in X \setminus F$. Probar que no es cierto en general que exista un punto $y \in F$ tal que $d(x,y) = d(x,F)$.

Es decir, la distancia entre un punto y un cerrado puede no realizarse.

(II) Sean $K \subset X$ un compacto y $x \in X \setminus K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x,K) = d(x,y)$.

Esto nos dice que la distancia entre un punto y un compacto siempre se realiza.

(III) Probar que si X tiene la propiedad de que toda bola cerrada es compacta entonces la distancia entre un punto y un cerrado siempre se realiza.

(IV) Sean $F,K \subset X$ dos subconjuntos disjuntos de X tales que F es cerrado y K es compacto. Probar que la distancia $d(F,K)$ entre F y K es positiva, pero puede no realizarse.

(V) Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1,K_2) = d(x_1,x_2)$.

Ejercicio 11. Sean (X,d) un espacio métrico completo y

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X : K \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

(I) Sea $\tilde{d}(A,B) = \sup_{a \in A}\{d(a,B)\}$. Verificar que en general $\tilde{d}$ **no** es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

(II) Sea $d \colon \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$, $d(A,B) = \text{máx}\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\}$ y consideremos para cada $C \subset X$ y $\varepsilon > 0$ el conjunto $B(C,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,C) < \varepsilon\}$ para cada $C \subset X$. Probar que $d(A,B) < \epsilon$ si y sólo si $A \subset B(B,\varepsilon)$ y $B \subset B(A,\varepsilon)$.

(III) Probar que d es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

Ejercicio 12. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i\in I}$ de un espacio métrico (X,d), un número $\varepsilon > 0$ se llama *número de Lebesgue* de $(U_i)_{i\in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Ejercicio 13. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y supongamos que X es compacto. Probar que toda función $X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva es un homeomorfismo.

Ejercicio 14. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y,d') la proyección $\pi \colon X \times Y \to Y$ definida por $\pi(x,y) = y$ es cerrada.

Ejercicio 15. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $(X \times Y, d_\infty)$, entonces f es continua.

Ejercicio 16. Sea $f : [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua que es uniformemente continua en $[b,+\infty)$ para cierto $b > a$. Probar que f es uniformemente continua en $[a,+\infty)$.

Ejercicio 17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 18. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Probar que toda función $X \longrightarrow \mathbb{R}$ semicontinua superiormente alcanza un máximo.