Cálculo Avanzado

Segundo cuatrimestre – 2024

Práctica 4

Completitud

Ejercicio 1. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si existe $c \geq 0$ tal que

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c\ d(x_1, x_2)$$

para cada $x_1, x_2 \in X$, entonces f es uniformemente continua.

Ejercicio 2.

(I) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f\colon X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

a) $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ para $n \to \infty$; y

b) $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$,

entonces f no es uniformemente continua en A.

(II) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. >Y en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?

(III) Verificar que la función $f(x) = \mathrm{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

Ejercicio 3.

(I) Sea $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

(II) Sea $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ un homeomorfismo uniforme. Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo. En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

Ejercicio 4.

(I) Dar un ejemplo de una función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

(II) Dar un ejemplo de una función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

Ejercicio 5. Sea $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subset X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.

Ejercicio 6. Sean X e Y espacios métricos y supongamos que Y es completo. Sea $D \subset X$ denso y sea $f\colon D \longrightarrow Y$ una función uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X, es decir, existe una única función continua $F\colon X \longrightarrow Y$ tal que $F|_D = f$. Probar que F es uniformemente continua.

Ejercicio 7. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Probar que:

(I) Se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ se tiene que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

(II) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(III) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

(IV) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces es acotada.

(V) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Ejercicio 8. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X, entonces X es completo.

Ejercicio 9. Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico. Probar que si A y B son completos, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son completos.

Ejercicio 10. Probar que todo espacio métrico con la métrica discreta es completo.

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico.

(I) Probar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X.

(II) Probar que si X es completo, entonces todo subconjunto cerrado $F \subseteq X$ es un subespacio completo de X.

Ejercicio 12 (Teorema de Cantor). Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) el espacio métrico X es completo;

(b) toda familia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados y no vacíos de X que cumplan:

- $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$; y
- $F_{n+1} \subset F_n$ para cada $n \geq 1$,

tiene un único punto en su intersección.

Ejercicio 13. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si (X, d) e (Y, d') son completos.

Ejercicio 14.

(I) Sea X un espacio métrico y sea $B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es acotada }\}$. Probar que $B(X)$ equipado con la métrica $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ es un espacio métrico completo.

(II) Sean $a < b \in \mathbb{R}$. Probar que $C[a, b]$ equipado con la métrica $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ es un espacio métrico completo.

(III) Probar que $c_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid a_n \to 0\}$ equipado con la métrica $d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\limits_{x\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$ es un espacio métrico completo.

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{D} \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ converge en X. Probar que X es completo.

Ejercicio 16. Probar que todo espacio métrico completo separable y no contable tiene cardinal c.

Ejercicio 17. Sea $X = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ y sea $((Y,d'),i)$ su completación. Calcular el cardinal de $Y \setminus i(X)$.

Ejercicio 18. Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 19. Sean (X,d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X. Probar que D no es un G_δ.

Ejercicio 20. Demostrar que no existe ninguna función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.
SUGERENCIA: para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists\, U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \operatorname{diam}(f(U)) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Ejercicio 21. Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que un conjunto $A \subset X$ es *nunca denso* si su clausura tiene interior vacío.

(I) Probar que si A es nunca denso, entonces $X \setminus A$ es denso. ¿'Vale la recíproca?

(II) Probar que si A es abierto y denso, entonces $X \setminus A$ es nunca denso.

Ejercicio 22. Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0,1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{f \in C[0,1] : f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

(I) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado y nunca denso en $(C[0,1], d_\infty)$.

(II) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.

Ejercicio 23. Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar que son equivalentes:

(I) A es nunca denso;

(II) toda bola abierta B contiene otra bola abierta $B' \subset B$ tal que $B' \cap A = \emptyset$;

(III) A no es denso en ninguna bola abierta.

Ejercicio 24. Sea $\operatorname{Lip}[a,b] = \{f \in C[a,b] / \ \exists k > 0,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|\}$. Probar que $\operatorname{Lip}[a,b]^\circ = \emptyset$ en $C[a,b]$.