Cálculo Avanzado

Segundo cuatrimestre – 2024

Práctica 3

Funciones continuas

Ejercicio 1. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

(i) $f\colon (\mathbb{R}^2, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $f(x,y) = x^2 + y^2$, donde d representa la métrica euclídea.

(ii) $id_{\mathbb{R}^2}\colon (\mathbb{R}^2, \delta) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.

(iii) $id_{\mathbb{R}^2}\colon (\mathbb{R}^2, d_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.

(iv) $i\colon (E,d) \longrightarrow (X,d)$, la inclusión, donde $E \subset X$.

Ejercicio 2. Sean $f, g, h\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \end{cases} \qquad g(x) = x \cdot f(x); \qquad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ con } \ (m:n) = 1, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que:

(i) f es discontinua en todo punto;

(ii) g sólo es continua en $x = 0$;

(iii) h es continua en $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

Ejercicio 3. Probar que un espacio métrico X es discreto (es decir, tal que todo subconjunto es abierto) si y sólo si toda función de X en un espacio métrico arbitrario es continua.

Ejercicio 4. Considerando la métrica usual en cada caso, probar que:

(i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2 + y \operatorname{sen}(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado;

(ii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $-1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado;

(iii) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ tal que $3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Mencione otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

Ejercicio 5. Consideramos las funciones $E, I : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$E(f) = f(0) \text{ e } I(f) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

(i) Demostrar que si utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_∞ ambas funciones resultan continuas.

(ii) Demostrar que si, en cambio, utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_1, entonces I es una función continua pero E no lo es.

(III) Analizar si es posible que una función $F\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞.

Ejercicio 6. Sean X e Y dos espacios métricos y sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una función continua. Probar que el gráfico de f, definido por

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\},$$

es cerrado en $X \times Y$. ¿Es cierta la afirmación recíproca?

Ejercicio 7. Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,d')$ una función. **Analizar la validez** de las siguientes afirmaciones:

(I) si $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, con cada $U_i \subset X$ abierto, y $f|_{U_i}$ es continua para todo $i \in I$, entonces $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua;

(II) si $X = \bigcup_{i\in I} F_i$, con cada F_i cerrado, y $f|_{F_i}$ es continua para todo $i \in I$, entonces $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua;

(III) si $X = \bigcup_{i=1}^{m} F_i$, con cada F_i cerrado, y $f|_{F_i}$ es continua para cada $i = \{1,\dots,m\}$, entonces $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua;

(IV) si $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$ y $f|_{X_i}$ es continua para cada $i = \{1,\dots,m\}$, entonces $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua.

Ejercicio 8. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$. Probar que f es continua si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ los conjuntos $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ son abiertos.

Ejercicio 9. Sea (X,d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X. Probar que la función $d_A\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_A(x) = d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a)$ es (uniformemente) continua.

Ejercicio 10 (Teorema de Urysohn)**.** Sea (X,d) un espacio métrico y sean A, B cerrados disjuntos de X.

(I) Probar que existe una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que:

$$f|_A \equiv 0, \qquad f|_B \equiv 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \le f(x) \le 1 \quad \forall\, x \in X.$$

Sugerencia: considerar la función $f(x) = \dfrac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$.

(II) Deducir que existen abiertos $U, V \subset X$ disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

Ejercicio 11. Sea $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una función.

(I) Probar que f es continua. ¿Sigue valiendo esto si f toma valores irracionales?

(II) Suponiendo que f es biyectiva, ¿puede ser un homeomorfismo?

Ejercicio 12. Sea (X,d) un espacio métrico, y sea $\Delta\colon X \longrightarrow X \times X$ la aplicación diagonal definida por $\Delta(x) = (x,x)$. Probar que:

(I) Δ es un homeomorfismo entre X y $\{(x,x) : x \in X\} \subset X \times X$.

(II) $\Delta(X)$ es cerrado en $X \times X$.

Ejercicio 13. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$ se dice *abierta* si $f(A)$ es abierto para todo abierto $A \subset X$ y se dice *cerrada* si $f(F)$ es cerrado para todo cerrado $F \subset X$.

(I) Suponiendo que f es biyectiva, probar que f es abierta (resp. cerrada) si y sólo si f^{-1} es continua.

(II) Dar un ejemplo de una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que no sea abierta.

(III) Dar un ejemplo de una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que no sea cerrada.

(IV) Mostrar con un ejemplo que una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada pero no continua.

Ejercicio 14. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una función.

(I) Probar que f es continua si y sólo $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subset X$.

Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

(II) Probar que f es continua y cerrada si y sólo si $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subset X$.

Ejercicio 15.

(I) Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y sea $D \subset X$ un subconjunto denso. Sean $f,g\colon X \longrightarrow Y$ funciones continuas. Probar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

(II) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x,y \in \mathbb{Q}$. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 16. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y consideremos en $X \times Y$ la métrica d_∞.

(I) Probar que las proyecciones $\pi_1\colon X\times Y \longrightarrow X$ y $\pi_2\colon X\times Y \longrightarrow Y$ son continuas y abiertas. Mostrar con un ejemplo que pueden no ser cerradas.

(II) Sea (Z,d'') un espacio métrico y sea $f\colon Z \longrightarrow X\times Y$ una función. Probar que f es continua si y sólo si $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$ lo son.

Ejercicio 17. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *semicontinua inferiormente* (resp. *superiormente*) en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,x_0) < \delta \Longrightarrow f(x_0) < f(x) + \varepsilon \qquad (\text{resp. } f(x_0) + \varepsilon > f(x)).$$

Probar que:

(I) f es continua en x_0 si y sólo si f es semicontinua inferiormente y superiormente en x_0.

(II) f es semicontinua inferiormente si y sólo si $f^{-1}(\alpha,+\infty)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(III) f es semicontinua superiormente si y sólo si $f^{-1}(-\infty,\alpha)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(IV) si $A \subset X$ y $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ es su función característica, entonces χ_A es semicontinua inferiormente (resp. superiormente) si y sólo si A es abierto (resp. cerrado).

Separabilidad

Ejercicio 18. Probar que $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ es separable.

Ejercicio 19. Sean $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \exists\, n_0 \text{ tal que } a_n = 0\ \forall\, n \geq n_0\}$ y $d_\infty \colon \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$ es un espacio métrico y que es separable.

Ejercicio 20. Sean (X,d) un espacio métrico y $\mathcal{B}$ un conjunto de abiertos de X. Probar que $\mathcal{B}$ es una base de X si y sólo si verifica la siguiente condición: "para todo abierto G de X y para todo $x \in G$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq G$".

Ejercicio 21. Probar que todo subespacio de un espacio métrico separable es separable.

Ejercicio 22. Sea (X,d) un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de X no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de X es a lo sumo numerable.

Ejercicio 23. Sean (X,d) e (Y,d') dos espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞ definida por

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \text{máx}\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y sólo si (X,d) e (Y,d') son separables.

Ejercicio 24. ¿Es el espacio (ℓ^∞, d_∞) separable?

Ejercicio 25. Sean X, Y espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suryectiva. Probar que si X es separable, entonces Y es separable.

Ejercicio 26. Sean d, d' dos métricas topológicamente equivalentes en un conjunto X. Probar que (X,d) es separable si y sólo si (X,d') lo es.