Cálculo Avanzado

Segundo cuatrimestre – 2024

Práctica 2

Espacios métricos

Ejercicio 1. Sean d_1, d_2, d_3, d_4, $d_5\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones dadas por:

$$d_1(x,y) = (x-y)^2, \qquad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|},$$
$$d_3(x,y) = |x^2-y^2|, \qquad d_4(x,y) = |x-2y|,$$
$$d_5 = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Decidir cuáles de ellas son métricas en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Sean d_1, d_2, $d_\infty : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dadas por

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|, \qquad d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2},$$
$$d_\infty(x,y) = \sup_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$$

para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

(I) Probar que estas funciones son métricas.

(II) Para $n=2$, dibujar las bolas abiertas $B_1(0)$ de centro $0\in\mathbb{R}^2$ y radio 1.

Notar que la métrica d_2 del Ejercicio 2 es la métrica usual de $\mathbb{R}^n$. En adelante, a menos que se indique una métrica diferente, supondremos que $\mathbb{R}^n$ tiene dicha métrica.

Ejercicio 3. Sea X un conjunto y sea $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ la función dada por

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\neq y,\\ 0 & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

Verificar que d es una métrica, y hallar los abiertos de (X,d).

NOTA: la métrica δ se llama la *métrica discreta* en X.

Ejercicio 4. Sea $p\in\mathbb{N}$ un primo fijo, y sea $N\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ dada por

$$N(a) := \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } p^n \mid a \text{ y } p^{n+1}\nmid a;\\ 0 & \text{si } a=0.\end{cases}$$

Sea $d\colon\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ dada por $d(a,b) := N(a-b)$. Probar que $(\mathbb{Z},d)$ es un espacio métrico.

Ejercicio 5. Sean $\ell^\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|<\infty\}$ y $d\colon\ \ell^\infty\times\ell^\infty\to\mathbb{R}$ dada por

$$d(a,b) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n-b_n|, \qquad (a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\, b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

Probar que (ℓ^∞,d) es un espacio métrico.

Ejercicio 6. Dados números reales $a < b$, sea $C[a,b]$ el conjunto de todas las funciones de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ que son continuas. Pruebe que las siguientes funciones definen métricas sobre $C[a,b]$:

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx, \qquad d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Ejercicio 7. Sean (X,d) un espacio métrico y $d'(x,y) := \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$.

(I) Probar que d' también es una métrica en X, que satisface $0 \leq d'(x,y) < 1$ para todos $x,y \in X$.

(II) Probar que un subconjunto $A \subset X$ es abierto para la métrica d si y sólo si lo es para la métrica d'.

(III) Deducir que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge a un punto x con la métrica d si y sólo si también converge a x con la métrica d'.

Ejercicio 8. Sean (X_1,d_1) y (X_2,d_2) espacios métricos. Consideremos el conjunto $X_1 \times X_2$ y la aplicación $d\colon (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$.

(I) Probar que d es una métrica en $X_1 \times X_2$.

(II) Probar que en el espacio métrico $(X_1 \times X_2, d)$ se cumple que una sucesión $((a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto (a,b) si y sólo si converge en cada coordenada, es decir, si y sólo si $a_n \to a$ en (X_1,d_1) y $b_n \to b$ en (X_2,d_2).

Ejercicio 9. Sean $(X_n,d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos y $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ su producto cartesiano. El objetivo de este ejercicio es construir una métrica para X en la cual la convergencia de una sucesión equivalga a la convergencia en cada coordenada.

(I) Supongamos primero que todos los X_n tienen diámetro menor o igual que 1, es decir, que $d_n(x,y) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x,y \in X_n$. Dados dos elementos $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, definimos

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}.$$

Probar que d es una métrica en X.

(II) Sea $x^1, x^2, x^3, \ldots$ una sucesión de puntos de X, es decir, cada x^k es una sucesión $(x_1^k, x_2^k, \ldots)$ en la cual $x_n^k \in X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un elemento de X. Probar que, con la métrica d definida en el ítem anterior, se tiene que $x^k \to x$ en X si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_n^k \to x_n$ en X_n.

(III) Mostrar cómo se puede reducir el caso general (es decir, sin tener la hipótesis $\operatorname{diam}(X_n) \leq 1$ para cada n) al caso ya resuelto en el primer ítem.

Ejercicio 10. Sea (X,d) un espacio métrico.

(I) Probar que si $(F_i)_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X, entonces $\bigcap_{i\in I} F_i$ es cerrado.

(II) Probar que si $F_1, \ldots, F_n$ son subconjuntos cerrados de X, entonces$\bigcup_{j=1}^{n} F_j$ es cerrado.

Ejercicio 11. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $G \subset X$ abierto y $F \subset X$ cerrado. Probar que $F \setminus G$ es cerrado y $G \setminus F$ es abierto.

Ejercicio 12. Sean (X,d) un espacio métrico y A, $B \subset X$.

(I) Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

(a) $A^\circ = \{x \in X : \exists r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A\}$;

(b) A es abierto si y sólo si $A^\circ = A$;

(c) $\emptyset^\circ = \emptyset$ y $X^\circ = X$;

(d) si $A \subset B$, entonces $A^\circ \subset B^\circ$;

(e) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, ¿se puede generalizar esta propiedad a una intersección infinita?

(f) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$, ¿vale la igualdad?

(II) Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

(a) A es cerrado si y sólo si $\overline{A} = A$;

(b) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{X} = X$;

(c) $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$;

(d) $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, ¿se puede generalizar esta propiedad a una unión infinita?

(e) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, ¿se puede generalizar esta propiedad a una intersección infinita?

(f) $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $x_n \longrightarrow x$.

(III) Probar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura:

(a) $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$;

(b) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$;

(c) ¿son ciertas las igualdades $\overline{A} = \overline{A^\circ}$ y $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

(IV) Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto.

(a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$;

(b) ∂A es cerrado;

(c) $\partial A = \partial(X \setminus A)$;

Ejercicio 13. Sea (X,d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r > 0$, se define la *bola cerrada* de centro a y radio r como el conjunto

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X : d(a,x) \leq r\}.$$

(I) Probar que $\overline{B}(a,r)$ es un conjunto cerrado y contiene a $\overline{B(a,r)}$.

(II) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a,r)$ cuya clausura no sea la bola cerrada $\overline{B}(a,r)$.

Ejercicio 14. Sean (X,d) un espacio métrico, p un punto de X y a,b números reales tales que $0 < a < b$. Probar que:

(I) $\{x \in X : a < d(x,p) < b\}$ es abierto;

(II) $\{x \in X : a \leq d(x,p) \leq b\}$ es cerrado.

Ejercicio 15. Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) dos espacios métricos y consideremos al conjunto $X \times Y$ dotado de la métrica d definida en el Ejercicio 8. Probar que si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, entonces:

(I) $(A\times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$;

(II) $\overline{A\times B} = \overline{A}\times\overline{B}$.

Ejercicio 16. Sea (X,d) un espacio métrico, y sean $A,B\subset X$.

(I) Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:

   (a) A' es cerrado;

   (b) si $A\subset B$ entonces $A'\subset B'$;

   (c) $(A\cup B)' = A'\cup B'$;

   (d) $\overline{A} = A\cup A'$;

   (e) $(\overline{A})' = A'$.

(II) Probar que $x\in X$ es un punto de acumulación de $A\subset X$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $x_n\neq x$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Ejercicio 17. Hallar interior clausura, frontera y conjunto derivado de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

$$[0,1] \quad ; \quad (0,1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q}\cap[0,1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0,1)\cup\{2\}.$$

Ejercicio 18. Caracterizar los abiertos y los cerrados de $\mathbb{Z}$ considerado como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 19. Probar que toda colección de conjuntos abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^n$, con la métrica usual, es a lo sumo numerable. Dar un ejemplo de colección de conjuntos cerrados disjuntos que no sea numerable.

Ejercicio 20. Sea $\mathcal{B} := \{B(q,r)\subset\mathbb{R}^n : q\in\mathbb{Q}^n, r\in\mathbb{Q}_{>0}\}$. Probar que si $U\subset\mathbb{R}^n$ es abierto y $x\in U$, existe $B\in\mathcal{B}$ tal que $x\in B\subset U$.

Ejercicio 21. Sea $S\subset\mathbb{R}^n$ con la métrica usual. Un punto $x\in\mathbb{R}^n$ es un *punto de condensación* de S si para todo $r>0$, se tiene que $B(x,r)\cap S$ es no numerable. Probar que si S es no numerable entonces existe un punto $x\in S$ de condensación de S.

Ejercicio 22. Sea $S\subset\mathbb{R}^n$, con la métrica usual. Probar que el conjunto de puntos aislados de S es contable.

Ejercicio 23. Sea (X,d) un espacio métrico, sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en X, y sean x, $y\in X$.

(I) Probar que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$.

(II) Probar que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy, entonces la sucesión de números reales $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Ejercicio 24. Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto $A\subseteq X$ es un *conjunto G_δ* si es la intersección de una familia numerable de abiertos de X, y que es un *conjunto F_σ* si es la unión de una familia numerable de cerrados de X.

(I) Probar que el complemento de un conjunto G_δ es un conjunto F_σ.

(II) Probar que el complemento de un conjunto F_σ es un conjunto G_δ.

(III) Probar que todo cerrado es un conjunto G_δ y todo abierto es un conjunto F_σ.

(IV) (a) Encontrar una familia numerables de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0,1)$. Ídem para $[0,1]$.

(b) Encontrar una familia numerable de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0,1)$.

(c) ¿Qué conclusión puede extraerse de estos ejemplos?

Ejercicio 25. Sea (X,d) un espacio métrico. Si $A \subseteq X$ es no vacío y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* como

$$d(x,A) = \text{ínf}\{d(x,a) : a \in A\}.$$

Probar las siguientes afirmaciones:

(I) si $x, y \in X$, entonces $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.

(II) si $x \in A$, entonces $d(x,A) = 0$;

(III) $d(x,A) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{A}$;

(IV) para cada $r > 0$, el conjunto $B(A,r) = \{x \in X : d(x,A) < r\}$ es abierto.

(V) para cada $r > 0$, el conjunto $B[A,r] = \{x \in X : d(x,A) \leq r\}$ es cerrado.

Ejercicio 26. Sea (X,d) un espacio métrico. Si A, $B \subseteq X$ son subconjuntos no vacíos, se define la *distancia entre A y B* como

$$d(A,B) = \text{ínf}\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(I) $d(A,B) = d(\overline{A},\overline{B})$;

(II) $d(A,B) = 0$ si y sólo si $A \cap B \neq \emptyset$;

(III) $d(A,B) = 0$ si y sólo si $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$;

(IV) para todo $C \subseteq X$ no vacío se tiene que $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$.