Cálculo Avanzado

Segundo cuatrimestre – 2024

Práctica 1

Cardinalidad

Conjuntos ordenados

Un *poset*[1] es un conjunto parcialmente ordenado; es decir, un conjunto P junto con una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva $\leq$. Una *cadena* es un conjunto totalmente ordenado; es decir, un poset $(C, \leq)$ tal que para todo par de elementos $c, c' \in C$ se tiene que $c \leq c'$ ó $c' \leq c$. Un *reticulado* es un poset $(L, \leq)$ en el cual todo subconjunto $\{x, y\}$ de dos elementos tiene supremo e ínfimo; se denotan $x \vee y = \sup\{x, y\}$ y $x \wedge y = \operatorname{ínf}\{x, y\}$ respectivamente.

Ejercicio 1. Sea A un cadena y sea B un conjunto parcialmente ordenado. Sea $f \colon A \to B$ una función inyectiva que es un morfismo de orden. Probar que si $a, a' \in A$ y $f(a) \leq f(a')$, entonces $a \leq a'$.

Ejercicio 2. Sea A un conjunto y sea $\prec$ un preorden en A, es decir una relación reflexiva y transitiva. Sea $\sim$ la relación en A definida por $a \sim b$ si $a \prec b$ y $b \prec a$.

(i) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

(ii) Probar que el cociente $A/\!\sim$ es un poset con el orden definido por $[a] \leq [b]$ si $a \prec b$.

Ejercicio 3. Probar que un morfismo de orden entre posets que es una función biyectiva no necesariamente es un isomorfismo.

Ejercicio 4. Probar que en un reticulado todo conjunto finito no vacío tiene supremo e ínfimo.

Ejercicio 5. Sea $f \colon A \to B$ un isomorfismo de orden entre reticulados. Probar que $f(a \vee a') = f(a) \vee f(a')$ para cualesquiera $a, a' \in A$.

Cardinalidad

Ejercicio 6. Demostrar que si A es un conjunto de n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

Ejercicio 7. Probar que los siguientes conjuntos son numerables (es decir, tienen cardinal $\aleph_0$):

$$\mathbb{Z}_{\leq -1} \quad ; \quad \mathbb{Z}_{\geq -3} \quad ; \quad 3 \cdot \mathbb{N} \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad \mathbb{N}^2 \quad ; \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{N}^m \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Ejercicio 8. Sea X un conjunto.

(i) Sean $A, B \subset X$ conjuntos contables. Probar que $A \cup B$ es contable.

(ii) Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos contables de X. Probar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es contable.

[1] El nombre proviene del inglés *partially ordered set*.

(III) Sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito y $\mathcal{S} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^m$. Probar que $\sharp(\mathcal{S}) = \aleph_0$.

Deducir que, cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos. ¿Cuántos subconjuntos de $\mathbb{N}^2$ pueden ser definidos en un lenguaje fijo? ¿Cuántos hay en total?

Ejercicio 9. Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable.

Ejercicio 10. Se dice que un número complejo $z \in \mathbb{C}$ es *algebraico* si existen $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ no todos nulos tales que

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0.$$

(I) Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.

(II) Deducir que existen números reales que no son algebraicos.

NOTA: Estos números se llaman *trascendentes*.

Ejercicio 11. Sea $X \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ un conjunto de números reales positivos. Supongamos que existe una constante positiva C tal que para cualquier subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ se tiene que $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq C$. Probar que X es contable.

Ejercicio 12. Sea Λ un conjunto e $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de intervalos de $\mathbb{R}$ disjuntos dos a dos; es decir, tales que $I_\alpha \cap I_{\alpha'} = \emptyset$ si $\alpha \neq \alpha'$. Probar que Λ es contable.

Ejercicio 13. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que:

$$\#\{x \in \mathbb{R} : f \text{ no es continua en } x\} \leq \aleph_0.$$

SUGERENCIA: *recuerde que f tiene una discontinuidad en $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si*

$$\lim_{t\to x^-} f(t) \neq \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Ejercicio 14. Probar que si A es un conjunto numerable, el subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ formado por los subconjuntos finitos de A es numerable.

Ejercicio 15. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos de sucesiones:

(I) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\geq 1} : a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

(II) $\{(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

(III) $\{(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : a_n \geq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

(IV) $\{(q_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} q_n = 0\}$.

(V) $\{(q_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : (q_n)_{n\geq 1} \text{ es periódica}\}$.

(VI) $\{(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : 1 \leq a_n \leq m \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \quad (m \in \mathbb{N})$.

Ejercicio 16. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:

i) $\{I \subset \mathbb{R} : I \text{ es un intervalo de extremos racionales}\}$.

ii) $\{[a,b] \subset \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}\}$.

iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y \geq 7\}$.

v) $\mathbb{R}_{>0}$.

Ejercicio 17. Probar que la unión numerable de conjuntos de cardinal c tiene cardinal c.

Ejercicio 18. Sean a, b y c cardinales. Probar que:

(I) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

(II) $a^{b+c} = a^b \cdot\ a^c$.

(III) $(a^b)^c = a^{bc}$.

(IV) $(ab)^c = a^c \cdot\ b^c$.

(V) Si $b \leq c$, entonces $\;a^b \leq a^c \quad$ y $\quad b^a \leq c^a$.

Ejercicio 19. Probar que $n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Ejercicio 20. Mostrar que $\mathbb{R}$ es unión disjunta de c conjuntos de cardinal c.

Ejercicio 21. Se consideran los siguientes conjuntos de funciones:

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$;
- $\mathcal{F}(\mathbb{Q}) = \{f : f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}\}$;
- $C(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f$ es continua$\}$;

(I) Probar que $\sharp(\mathcal{F}(\mathbb{R})) > c$.

(II) Calcular $\sharp(\mathcal{F}(\mathbb{Q}))$.

(III) Probar que la función $\phi : C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{Q})$ dada por $\phi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva. ¿Qué significa esto?

(IV) Calcular $\sharp(C(\mathbb{R}))$.

Ejercicio 22. Probar que el conjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ formado por todos los subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$ tiene cardinal c.

Aplicaciones del Lema de Zorn

Ejercicio 23. Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Probar que o bien existe $f : A \to B$ inyectiva, o bien existe $g : B \to A$ inyectiva.

Ejercicio 24. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un subespacio. Sea $T : S \to \mathbb{R}$ una transformación lineal. Probar que T se puede extender a todo el espacio, es decir que existe una transformación lineal $\widetilde{T} : V \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{T}|_S = T$.

Ejercicio 25. Sea k un cuerpo y $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial. Probar que todo conjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ se puede extender a una base.

Ejercicio 26. Sea k un cuerpo y $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial. Probar que de todo sistema de generadores de $\mathbb{V}$ se puede extraer una base.