

PRÁCTICA 3

1. Probar en cada uno de los siguientes casos que el grupo G actúa sobre el conjunto X . En cada caso calcular ${}^G X = \{x \in X : G \cdot x = x\}$, las G -órbitas de X , y el estabilizador de cualquier elemento de X
 - a) $G = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ con } a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ y $f \cdot x = f(x)$
 - b) $G = \mathbb{R}^\times$, $X = \mathbb{R}_{>0}$ y $a \cdot x = x^a$ con $a \in \mathbb{R}^\times$ y $x \in \mathbb{R}_{>0}$
 - c) $G = \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$
2. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y $S \trianglelefteq G$. Determinar la condición necesaria y suficiente para que exista una acción de G/S en X tal que $\bar{a} \cdot x = a \cdot x \quad \forall a \in G \text{ y } x \in X$.
3. Sea X un conjunto finito. Determinar el número de acciones de $\mathbb{Z}$ sobre X .
4. Sea G un grupo finito y sean H, K subgrupos de G . Sea $X = HK$.
 - a) Probar que la siguiente fórmula define una acción de $H \times K$ en X : $(h, k) \cdot x = h x k^{-1}$.
 - b) Probar que $\mathcal{O}_1 = X$ y probar que el estabilizador del 1 es isomorfo a $H \cap K$.
 - c) Deducir que $|H||K| = |HK||H \cap K|$.
5. Sea G un grupo.
 - a) Probar que si $|G| = p^n$ con p primo y $n \in \mathbb{N}$ entonces $Z(G) \neq 1$.
 - b) Probar que si $G/Z(G)$ es cíclico entonces G es abeliano.
 - c) Probar que si $|G| = p^2$ con p primo entonces G es abeliano.
 - d) Caracterizar todos los grupos de orden p^2 .
 - e) Dar un ejemplo de un grupo G no abeliano tal que $G/Z(G)$ sea abeliano.
6. Sea p un primo.
 - a) Sea G un grupo no abeliano con $|G| = p^3$. Calcular $|Z(G)|$ y probar que $Z(G) = [G; G]$.
 - b) Calcular $[G, G]$ con $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$.
7. Sea G un grupo tal que $|G| = 2n$, G tiene exactamente n elementos de orden 2 y los restantes forman un subgrupo H . Probar que entonces n es impar y $H \trianglelefteq G$.
8. Sea p primo y $|G| = n$. Probar que existe k tal que $n = p^k \iff \forall x \in G, \text{ord}(x) = p^s$ para algún s . (s depende de x)
9. Sea G un grupo finito y H un subgrupo propio.
 - a) Probar que la regla $g \cdot xH := gxH$ define una acción de G en el conjunto G/H . Deducir que la asignación

$$\rho : G \rightarrow S(G/H), \quad \rho(g)(xH) = gxH$$
 es un morfismo de grupos. Notaremos $K := \ker(\rho)$ e $I := \text{im}(\rho)$
 - b) Probar que $|K|$ divide a $|H|$ e $|I|$ divide a $[G : H]!$.
 - c) Probar que si el índice de H es el menor primo que divide al orden de G , entonces $[G : K] = [G : H]$ y $H = K$. En particular H es normal en G .
 - d) Probar que si G es simple, entonces $|G| \mid [G : H]!$.

10. (Lema de Burnside) Sea G un grupo finito actuando sobre un conjunto finito X . Notamos por $X/G = \{\mathcal{O}_x : x \in X\}$ al conjunto de órbitas de la acción y $X^g := \{x \in X : g \cdot x = x\}$ el conjunto de puntos fijos por un elemento $g \in G$.

(i) Probar que

$$\sum_{g \in G} |X^g| = |\{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}| = \sum_{x \in X} |G_x|.$$

(ii) Probar que $\sum_{x \in X} \frac{1}{|\mathcal{O}_x|} = |X/G|$.

(iii) Concluir que la cantidad de órbitas es igual al promedio de los puntos fijos:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

(iv) Deducir que $|X/G| \geq |X|/|G|$ y la igualdad se tiene si y sólo si ningún elemento (no trivial) de G tiene puntos fijos.

11. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ coprimos y sea G un grupo de orden mn . Probar que si G posee exactamente un subgrupo M de orden m y exactamente un subgrupo N de orden n , entonces G es isomorfo al producto directo de M y N .

12. a) Sean $f : H \rightarrow H'$ y $g : K \rightarrow K'$ dos morfismos de grupos. Probar que la función $f \times g : H \times K \rightarrow H' \times K'$ definida por $(h, k) \mapsto (f(h), g(k))$ es un morfismo de grupos.
b) Sean H y K dos grupos y sean $S \trianglelefteq H$ y $T \trianglelefteq K$. Probar que $S \times T \trianglelefteq H \times K$ y que

$$\frac{H \times K}{S \times T} \simeq (H/S) \times (K/T).$$

13. Probar que $\mathbb{Q}$ no es un producto directo no trivial.

14. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G tales que $G = H \rtimes K$.

a) Probar que si $K \trianglelefteq G$ entonces $kh = hk, \forall h \in H, \forall k \in K$.

b) Deducir que G es abeliano si y sólo si H y K son abelianos y $K \trianglelefteq G$.

15. Sea $n \geq 3$. Para $G = \mathbb{D}_n, \mathbb{S}_n$, descomponer G como producto semidirecto $G \cong H \rtimes_{\phi} K$ con K cíclico no trivial.

16. ¿Es $\mathbb{H}$ isomorfo a algún producto semidirecto no trivial?

17. Determinar si existe un grupo K tal que G sea el producto semidirecto de H y K en cada uno de los siguientes casos.

a) $G = \mathbb{C}^{\times}, \quad H = S^1$

b) $G = G_{12}, \quad H = G_3$

c) $G = G_{12}, \quad H = G_2$

d) $G = \mathbb{C}, \quad H = \mathbb{R}$

e) $G = \text{GL}(n, \mathbb{C}), \quad H = \text{SL}(n, \mathbb{C})$

f) $G = \mathbb{S}_4, \quad H = \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$

18. Sean $H = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y $K = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

a) Probar que $\text{Aut}(H) \simeq \mathcal{U}_3$.

b) Describir todos los productos semidirectos $G = H \rtimes_{\varphi} K$.

c) Mostrar que uno de estos es no abeliano y no isomorfo a $\mathbb{A}_4$.

19. Calcular todos los p -subgrupos de Sylow de:

$$\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3.$$

20. Dado $p \in \mathbb{Z}$ primo, consideremos el grupo $\mathbb{S}_p$.

a) Calcular la cantidad de p -ciclos que hay en $\mathbb{S}_p$. Deducir la cantidad de p -subgrupos de Sylow en $\mathbb{S}_p$.

b) Deducir que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ (una de las implicaciones del *Teorema de Wilson*).

21. Sea G un grupo, $|G| = pq$, $p > q$ primos tal que q no divide a $p-1$. Probar que G es cíclico.

22. Sean p, q primos, $|G| = p^2q$. Probar que G no es simple.

23. Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes: 24, 30, 36, 56, 96, 200, 204, 260, 312, 2540.

24. Sea G con $|G| < \infty$ y $p < q$ primos tal que p^2 no divide a $|G|$. Sean H_p y H_q subgrupos de Sylow de G con $H_p \trianglelefteq G$. Probar que

a) $H_p H_q$ es subgrupo de G .

b) $H_p H_q \trianglelefteq G \Rightarrow H_q \trianglelefteq G$.