

PRÁCTICA 2

Sea G un grupo y sean X, Y subconjuntos no vacíos de G . Se define

$$X \cdot Y = XY = \{x \cdot y : x \in X, y \in Y\}.$$

Si $x \in G$ escribimos $xH = \{x\}H$.

1. Sea G un grupo y H, K subgrupos de G .
 - a) Probar que HK es un subgrupo de G si y solo si $HK = KH$.
 - b) Probar que si H o K es normal, entonces HK es un subgrupo.
 - c) Si H y K son normales, entonces HK es un subgrupo normal.
 - d) Dar un ejemplo de un grupo G y dos subgrupos H y K tales que HK no sea un subgrupo.
2. Decidir cuáles de los siguientes subgrupos son normales
 - a) $G = \mathbb{D}_4$, $H = \{1, r, r^2, r^3\}$.
 - b) $G = \mathbb{S}_n$, $H = \mathbb{A}_n$, con $n \in \mathbb{N}$.
 - c) $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $H = \text{SL}_n(\mathbb{R})$.
3. Sea G es un grupo abeliano. Probar que todo subgrupo es normal.
 Probar que el grupo $\mathbb{H}$ es un contraejemplo para la recíproca de esta afirmación.
4. Dados los siguientes subgrupos de $\mathbb{S}_4$

$$H = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4)\} \quad K = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

$$U = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$$
 - a) Probar que $H \trianglelefteq K$, $K \trianglelefteq \mathbb{A}_4$ y $K \trianglelefteq \mathbb{S}_4$.
 - b) Probar que H no es normal en $\mathbb{A}_4$ ni en $\mathbb{S}_4$ (la normalidad no es transitiva).
 - c) Determinar si $U \trianglelefteq \mathbb{S}_4$.
5. Encontrar todos los subgrupos normales de G .
 - a) $G = \mathbb{D}_n$, donde n es impar.
 - b) $G = \mathbb{D}_n$, donde n es par.
6. Sean G y G' grupos y sea $f : G \rightarrow G'$ un morfismo.
 - a) Probar que $\ker(f) \trianglelefteq G$
 - b) ¿Es $\text{im}(f) \trianglelefteq G'$?
 - c) Probar que si H es un subgrupo normal de G , entonces existe un grupo G' y un epimorfismo $f : G \rightarrow G'$ tal que $\ker(f) = H$.
7. Probar que la aplicación $g \in G \mapsto c_g \in \text{Aut}(G)$ es un morfismo de grupos bien definido. Describir su núcleo. Su imagen se nota $\text{Inn}(G)$ y sus elementos se llaman *automorfismos interiores*. Mostrar que $\text{Inn}(G)$ es un subgrupo normal de $\text{Aut}(G)$.
8. Sea G un grupo y H un subgrupo tal que $|G : H| = 2$. Probar que $H \trianglelefteq G$.
9. Probar que si G es un grupo abeliano simple (es decir, sin subgrupos normales no triviales) entonces existe un primo p tal que $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

10. Hallar un sistema de representantes de G módulo S en los siguientes casos y determinar $|G : S|$
- $G = \mathbb{R}, \quad S = \mathbb{Z}$
 - $G = \mathbb{D}_n, \quad S = \langle r \rangle$
 - $G = \text{GL}_n(K), \quad S = \text{SL}_n(K), \quad \text{donde } K \text{ es un cuerpo.}$
 - $G = \mathbb{C}^\times, \quad S = S^1$
11. Calcular todos los cocientes por subgrupos normales de $\mathbb{S}_3, \mathbb{D}_4$ y $\mathbb{H}$. Es decir, caracterizar todos los grupos que pueden obtenerse como cocientes de los grupos mencionados.
12. Probar que
- $\mathbb{C}^\times / \mathbb{R}_{>0} \simeq S^1$
 - $\text{GL}_n(K) / \text{SL}_n(K) \cong K^\times$ para todo cuerpo K y $n \in \mathbb{N}$
 - $\mathbb{Q}^\times / \mathbb{Q}_{>0} \simeq G_2$
 - $S^1 / G_n \simeq S^1$
 - $G_n / G_m \simeq G_{\frac{n}{m}}$ para $m \mid n$
 - $\mathbb{D}_n / \langle r^m \rangle \cong \mathbb{D}_m$ para $m \mid n$
13. Calcular G/H
- $G = \mathbb{S}_4, \quad H = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ (comparar con el ejercicio 4).
 - $G = \mathbb{D}_6, \quad H = \{1, r^3\}$ (comparar con el ejercicio 5).
14. a) Sea $f : G \longrightarrow G'$ un epimorfismo y sea $H \trianglelefteq G$. Si $H' = f(H)$, probar que
- $H' \trianglelefteq G'$
 - Si f es un isomorfismo, $G/H \simeq G'/H'$
- b) Si $G \simeq G', H \simeq H', H \trianglelefteq G$ y $H' \trianglelefteq G'$, ¿vale necesariamente $G/H \simeq G'/H'$?
15. Sea G un grupo finito y $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal tal que $|N|$ y $[G : N]$ son coprimos. Probar que para todo $\varphi \in \text{Aut}(G)$ se tiene que $\varphi(N) = N$.
- Sugerencia:** Usar la identidad de Bézout para probar que $\varphi(N) \subseteq N$.
16. Sea G un grupo y sean H, K subgrupos normales de G .
- Mostrar que hay un morfismo inyectivo $G/(H \cap K) \rightarrow G/H \times G/K$.
 - Deducir que si G/H y G/K son abelianos y $H \cap K = 1$ entonces G es abeliano.
 - Probar que si $G = HK$, entonces el morfismo del ítem a) es un isomorfismo.
17. Hallar $Z(G)$ (el centro de G) en cada uno de los siguientes casos:
- $G = \mathbb{D}_n$
 - $G = \mathbb{S}_4$
 - $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \right\}$
 - $G = \mathbb{H}$
 - $\text{GL}_n(\mathbb{R})$
 - $\text{SL}_n(\mathbb{R})$
18. Sea G un grupo. Definimos $[G, G]$, el *conmutador* de G , como el subgrupo de G generado por todos los elementos de la forma $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$.
- Probar que $[G, G]$ es un subgrupo normal de G .
 - Probar que $G/[G, G]$ es un grupo abeliano.

- c) Sea $f : G \rightarrow K$ un morfismo donde K es un grupo abeliano. Probar que f se factoriza unívocamente por $G/[G, G]$, esto es, existe un único morfismo $\bar{f} : G/[G, G] \rightarrow K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & K \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ G/[G, G] & & \end{array}$$

- d) Sea $H \subset G$ un subgrupo. Probar que

$$[G, G] \subseteq H \Leftrightarrow H \trianglelefteq G \text{ y } G/H \text{ es abeliano.}$$

Deducir que $[G, G]$ es el menor subgrupo por el cual hay que dividir a G para que el cociente quede abeliano.

19. Hallar $[G, G]$ en cada uno de los siguientes casos

- a) $G = \mathbb{D}_n$
- b) $G = \mathbb{H}$
- c) $G = \mathbb{S}_4$
- d) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right\}$

20. Probar que los únicos grupos no abelianos de orden 8 son $\mathbb{H}$ y $\mathbb{D}_4$.

21. Sea p un primo mayor o igual que 3. Probar que si $|G| = 2p$ entonces G es abeliano o $G \simeq \mathbb{D}_p$.

22. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

- a) Si $|G : H| = 2$ y H es abeliano entonces $H \subset Z(G)$.
- b) Si $|G| = n$ y k divide a n , entonces G tiene un elemento de orden k .
- c) Si $|G| = n$ y k divide a n , entonces G tiene un subgrupo de orden k .
- d) Si $\forall x \in G$, se tiene que $\text{ord}(x) < \infty \Rightarrow |G| < \infty$.
- e) Si p divide a $|G|$, entonces existe H subgrupo tal que $|G : H| = p$.
- f) Los elementos de orden finito de un grupo G forman un subgrupo.