

PRÁCTICA 1

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $G_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.
 - a) Probar que $(G_n, \cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in G_n$.
 - b) Probar que G_n es cíclico, es decir, que existe $w \in G_n$ que satisface: $\forall z \in G_n \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w^k$.
2. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
 - a) Probar que $(S^1, \cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in S^1$.
 - b) Determinar si S^1 es cíclico.
3. En cada uno de los siguientes casos determinar si $(G, *)$ es un grupo y, en caso afirmativo, determinar si es abeliano:
 - a) $G = \mathbb{Q}_{>0}$ $a * b = a \cdot b$.
 - b) $G = M_3(\mathbb{Z})$ $a * b = a \cdot b$.
 - c) $G = M_n(\mathbb{R})$ $a * b = a + b$.
 - d) $G = \text{SL}_n(\mathbb{R}) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(a) = 1\}$ $a * b = a \cdot b$.
 - e) $G = \text{End}_K(V)$, con V un K -espacio vectorial $f * g = f \circ g$.
 - f) $G = \{f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \mid d(f(x), f(y)) = d(x, y) \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}$ $f * g = f \circ g$.
 - g) $G = \mathbb{S}(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ es biyectiva}\}$, donde X es un conjunto no vacío y $f * g = f \circ g$.
Notación: Cuando $X = \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{S}(X)$ será notado $\mathbb{S}_n$.
 - h) $G = \mathbb{S}(\mathbb{Z})$ $f * g = f \circ g^{-1}$.
4. Probar que todos los grupos de 4 elementos son abelianos.
(Sugerencia: hacer todas las posibles tablas de operaciones).
5. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{U}_n = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n, (k, n) = 1\}$. Probar que $\mathcal{U}_n$, considerado con el producto de número enteros módulo n como operación, es un grupo.
6. Sea G un grupo. Sea $(G^{\text{op}}, \cdot)$ tal que $G^{\text{op}} = G$ como conjunto, y el producto está dado por $g \cdot h = hg$. Probar que G^{op} es un grupo. Llamamos a G^{op} el *grupo opuesto de G* .
7. Sean G y H dos grupos. Consideremos la operación $\cdot$ sobre el conjunto $K = G \times H$ dada por $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$. Mostrar que K es un grupo. Llamamos a K el *producto directo de G y H* y lo notamos $G \times H$.
8. a) Sea $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ un grupo abeliano finito. Probar que

$$\sum_{i=1}^n g_i = \sum_{g \in G: 2g=0} g.$$

$$b) \text{ Calcular } \sum_{a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} a.$$

$$c) \text{ Calcular } \prod_{w \in G_n} w.$$

9. Sea $(G, *)$ un grupo finito y sea $S \subset G$ un subconjunto no vacío. Probar que S es un subgrupo si y sólo si $xy \in S, \forall x, y \in S$.

10. Sea G un grupo y sean H_1, H_2 y H_3 tres subgrupos de G .
- Probar que $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo.
 - Probar que $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo si y sólo si $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.
 - ¿Es cierto que si $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ es un subgrupo de G , entonces $\exists i, j$ con $i \neq j$ tal que $H_i \subset H_j$?

11. Sea G un grupo.

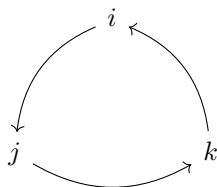
- Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos de G . Probar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo de G .
- Sea $X \subseteq G$ un subconjunto arbitrario. Probar que existe un menor subgrupo de G que contiene a X . Describirlo en términos de los elementos de X .

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo de G generado por X* y se nota $\langle X \rangle$. Si $X = \{x_1, \dots, x_r\}$, escribimos $\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ en lugar de $\langle \{x_1, \dots, x_r\} \rangle$.

12.
 - Probar que $\mathbb{Z} = \langle a, b \rangle$ si y sólo si a y b son coprimos.
 - Probar que $\mathbb{Z}$ tiene sistemas de generadores minimales de n elementos $\forall n \in \mathbb{N}$.
13. Hallar todos los subgrupos cíclicos de: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \mathbb{S}_3, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
14. Sea $\mathbb{H}$ el conjunto de 8 elementos $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dotado del producto dado por las siguientes ecuaciones y la regla usual de los signos:

$$\begin{aligned} i \cdot j &= k, & j \cdot k &= i, & k \cdot i &= j, \\ j \cdot i &= -k, & k \cdot j &= -i, & i \cdot k &= -j, \\ i \cdot i &= j \cdot j = k \cdot k = -1. \end{aligned}$$

El par $(\mathbb{H}, \cdot)$ es un grupo no abeliano al que llamamos *grupo de cuaterniones*. El siguiente diagrama permite recordar la tabla de multiplicación de $\mathbb{H}$:



Hallar todos los subgrupos de $\mathbb{H}$.

15. Sean G un grupo y $a \in G$. El *centralizador de a en G* es $C_G(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$. Probar que se trata de un subgrupo de G .
16. Probar que si H es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = n \cdot \mathbb{Z}$.
17. Probar que si H es un subgrupo finito de $\mathbb{C}^\times$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = G_n$.
18. Dado $n \in \mathbb{N}$, sean $r \in GL_2(\mathbb{R})$ la matriz que representa la rotación en sentido antihorario de ángulo $2\pi/n$ y s la simetría alrededor del eje x . Llamamos *n -grupo Dihedral* al subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$ que generan r y s y lo notamos $\mathbb{D}_n$. Calcular el orden de $\mathbb{D}_n$.
19. Sea G un grupo. Su *centro* es el subgrupo

$$Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ para todo } h \in G\}.$$

Un elemento de $Z(G)$ se dice *central*.

- Mostrar que $Z(G)$ es un subgrupo de G .

b) Sean G un grupo y $X \subseteq G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$. Mostrar que

$$Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ para todo } x \in X\}.$$

c) Encontrar el centro de un grupo abeliano, de $\mathbb{D}_n$ para $n \geq 1$, de $\mathbb{H}$, y de $\text{GL}_n(K)$ para K un cuerpo y $n \geq 1$.

d) Sean G un grupo y X un conjunto. Calcular el centro de G^X .

20. Hallar $\text{ord}(x)$ en los casos:

a) $G = \mathbb{S}_8 \quad x = (1\ 2)(5\ 6\ 7) \quad ; \quad x = (1\ 2\ 3\ 5)(1\ 3\ 7\ 8).$

b) $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \quad x = 2 \quad ; \quad x = 3 \quad ; \quad x = 4.$

c) $G = \mathbb{H} \quad x = i.$

d) $G = S^1 \quad x = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n}).$

e) $G = \mathbb{D}_4 \quad x = r^2s \quad ; \quad x = r^3.$

f) G un grupo cualquiera y $x = a^d$, donde $a \in G$ es un elemento de orden n y d es un número natural.

21. Sea $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Probar que $\text{ord}(x) = n$ si y sólo si $(x, n) = 1$.

22. a) Calcular el orden de todos los elementos de $\mathbb{S}_3$.

b) Sea $\sigma = (1\ 3\ 2)$, calcular el subgrupo $C_{\mathbb{S}_3}(\sigma) = \{r \in \mathbb{S}_3 \mid r\sigma = \sigma r\}$.

c) Hallar, si existe, un $\sigma \in \mathbb{S}_3$ tal que el subgrupo $C_{\mathbb{S}_3}(\sigma)$ tenga orden 1, 2, 3, 6.

23. Probar que si G_1 y G_2 son grupos y $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ son elementos de orden finito, entonces el orden de (g_1, g_2) en $G_1 \times G_2$ es el mínimo común múltiplo entre los órdenes de g_1 y g_2 .

24. Sea p un número primo, $m \in \mathbb{N}$ y sea G un grupo de orden p^m . Probar que existe un elemento de orden p en G .

25. Sean $(G, \cdot)$ un grupo y $a, b \in G$

a) Probar que las siguientes aplicaciones de G en G son biyectivas y encontrar sus inversas

1) $x \mapsto a \cdot x$

3) $x \mapsto a \cdot x \cdot a^{-1}$

5) $x \mapsto a \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$

2) $x \mapsto a \cdot x \cdot b$

4) $x \mapsto x^{-1}$

b) Determinar cuáles de estas aplicaciones son morfismos.

c) Idem en el caso en que G sea abeliano.

26. Dados los grupos:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus G_4$$

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{D}_4$$

$$G_8$$

$$\mathbb{H}$$

$$\mathcal{K},$$

$$\text{con } \mathcal{K} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \text{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Decidir cuáles son abelianos, cuáles son cíclicos y cuáles son isomorfos entre sí.

Definición : Notamos con $\mathbb{A}_n$ al subgrupo de $\mathbb{S}_n$ formado por las permutaciones pares (es decir, con signo 1).

27. Determinar si G y K son isomorfos en los casos:

a) $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$

- b) $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad K = G_n.$
- c) $G = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \quad K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$
- d) $G = \mathbb{Q} \quad K = \mathbb{R}.$
- e) $G = \mathcal{U}_{16} \quad K = \mathbb{H}.$
- f) $G = \mathcal{U}_{16} \quad K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$
- g) $G = \mathbb{S}_3 \quad K = \mathbb{D}_3.$
- h) $G = \mathbb{A}_4 \quad K = \mathbb{D}_6.$

28. Sea $f : G \longrightarrow K$ un morfismo de grupos. Probar que $\text{ord}(f(x))$ divide a $\text{ord}(x)$ si $\text{ord}(x)$ es finito.

29. Sea $f : G \longrightarrow L$ un epimorfismo. Decidir para cuáles P_i vale: “ G verifica $P_i \Rightarrow L$ verifica P_i ”

- | | |
|------------------------------|---|
| (P_1) tener n elementos. | (P_5) ser cíclico. |
| (P_2) ser finito. | (P_6) todo elemento tiene orden finito. |
| (P_3) ser conmutativo. | (P_7) todo elemento tiene orden infinito. |
| (P_4) ser no conmutativo. | |

30. Sea $f : G \longrightarrow L$ un monomorfismo. Decidir para cuáles P_i del ejercicio anterior vale: “ L verifica $P_i \Rightarrow G$ verifica P_i ”.

- 31. a) Probar que $\text{Aut}(\mathbb{Z}) \simeq G_2.$
- b) Hallar $\text{Hom}(G_n, \mathbb{Z}).$
- c) Hallar $\text{Hom}(G, \mathbb{Z})$ para G un grupo de orden finito.

32. Sea p un número primo mayor que 2. Se considera el conjunto

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$$

Probar que G es un grupo no abeliano tal que todo elemento distinto de la identidad tiene orden p . ¿Qué pasa si $p = 2$?

33. Sea $G = M_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Hallar $|G|$ y encontrar subgrupos de G de orden 2, 4, 8.

- 34. a) Probar que son equivalentes:
 - i) G es abeliano.
 - ii) La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ es un morfismo de grupos.
 - iii) La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^2$ es un morfismo de grupos.
- b) Probar que si $x^2 = 1$ para todo $x \in G$ entonces G es abeliano.

35. Probar que

- a) $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \neq 0.$
- b) $\text{Hom}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) = 0.$
- c) $\text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0.$
- d) No existe un epimorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$

36. Hallar dos grupos G y K no isomorfos tales que $\text{Aut}(G) \simeq \text{Aut}(K).$