

Producto directo

Recuerdo. Dados dos grupos H y K , definimos su producto directo (externo) $H \times K$ como el producto cartesiano de ellos con la multiplicación coordinada a coordinada. Esta es una manera de conseguir grupos nuevos a partir de otros.

Observación. ■ Como $H \simeq H \times 1 \leq H \times K$ y $K \simeq 1 \times K \leq H \times K$, podemos identificar H y K como subgrupos del producto de esta manera. Via esta identificación, tenemos que $H, K \trianglelefteq H \times K$. ¿A qué son isomorfos los cocientes?

- Via la identificación, $HK = H \times K$. Es decir, todo elemento de $H \times K$ se escribe como alguien de $H (= H \times 1)$ multiplicado por alguien de $K (= 1 \times K)$.
- Nuevamente, via la identificación de antes, $H \cap K = 1$.

Proposición. Sea G un grupo y sean $H, K \trianglelefteq G$ dos subgrupos normales de G tales que $H \cap K = 1$. Entonces $HK \simeq H \times K$.

Demostración. Como $H \trianglelefteq G$, sabemos que HK es un subgrupo de G . Además, dados $h \in H$ y $k \in K$, por normalidad tenemos $k^{-1}hk \in H$, y luego $h^{-1}(k^{-1}hk) \in H$. Análogamente, $(h^{-1}k^{-1}h)k \in K$, y como $H \cap K = 1$ por hipótesis, $h^{-1}k^{-1}hk = 1$, es decir que $hk = kh$ (todo elemento de H conmuta con todo elemento de K).

Por otro lado, si $hk = \tilde{h}\tilde{k}$, entonces $\tilde{h}^{-1}h = \tilde{k}k^{-1} \in H \cap K = 1$, así que $h = \tilde{h}$ y $k = \tilde{k}$, es decir que la escritura de un elemento de HK como hk con $h \in H$ y $k \in K$ es única. Luego, la función

$$\begin{aligned}\varphi : HK &\longrightarrow H \times K \\ hk &\longmapsto (h, k)\end{aligned}$$

está bien definida y es una biyección. Es un isomorfismo, ya que si $h_1, h_2 \in H$ y $k_1, k_2 \in K$, entonces

$$(h_1k_1)(h_2k_2) = (h_1h_2)(k_1k_2),$$

ya que h_2 y k_1 conmutan. Luego,

$$\varphi(h_1k_1h_2k_2) = \varphi(h_1h_2k_1k_2) = (h_1h_2, k_1k_2) = (h_1, k_1)(h_2, k_2) = \varphi(h_1, k_1)\varphi(h_2, k_2).$$

■

Definición. Sean G es un grupo y $H, K \trianglelefteq G$ subgrupos normales tales que $H \cap K = 1$. El **producto directo interno** de H y K es HK y $H \times K$ es el **producto directo externo** de H y K .

Por la Proposición de antes, esta distinción es únicamente notacional.

Ejercicio. Sea $n \in \mathbb{N}$ impar. Probar que $D_{2n} \simeq D_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Consideremos los subgrupos $H = \langle s, r^2 \rangle$ y $K = \langle r^n \rangle$. Notemos primero que $H \simeq D_n$ y $K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, así que basta con ver que D_{2n} es el producto directo interno de H y K .

- Tenemos que

$$s \in HK \quad \text{y} \quad r = (r^2)^{\frac{n+1}{2}} r^n \in HK,$$

de donde $D_{2n} = HK$.

- $[D_{2n} : H] = 2$, por lo que $H \trianglelefteq D_{2n}$.
- $sr^n = r^{-n}s = r^ns$, y $rr^n = r^nr$, de donde $K \leq Z(D_{2n})$. En particular, $K \trianglelefteq D_{2n}$.

- Como $H \cap K \leq K = \{1, r^n\}$, veamos que $r^n \notin H$. Si no fuera así, existiría un $m \in \mathbb{N}$ tal que $r^n = (r^2)^m$, pero el término izquierdo tiene orden 2, mientras que el derecho tiene orden divisor de n , que es impar, por lo que no puede ser orden 2. Así, $H \cap K = 1$.

Luego, D_{2n} es el producto directo interno de H y K , y por la proposición concluimos que

$$D_{2n} \simeq H \times K \simeq D_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

como queríamos ver.

Producto semidirecto

La idea ahora es, como en el caso de los productos directos, dar una forma de crear nuevos grupos a partir de otros. Esta construcción es una generalización del producto directo, en la que uno de los subgrupos no tiene por qué ser normal.

Sean G un grupo, $H \trianglelefteq G$ un subgrupo normal y $K \leq G$ un subgrupo tales que $H \cap K = 1$. En esta situación, sigue siendo cierto que la escritura de los elementos de la forma hk , con $h \in H$ y $k \in K$ es única. Veamos, con esta escritura, cómo escribir su producto:

$$(h_1 k_1)(h_2 k_2) = h_1 k_1 h_2 (k_1^{-1} k_1) k_2 = \underbrace{h_1 (k_1 h_2 k_1^{-1})}_{\in H} \underbrace{k_1 k_2}_{\in K}.$$

Queremos comenzar con dos grupos H y K , y definir un nuevo grupo que contenga copias isomorfas de ellos, de manera que (salvo esta identificación), H sea normal y $H \cap K = 1$. Para esto, hay que reinterpretar esta ecuación en términos de H y K , sin asumir que tenemos un grupo que los contiene. Particularmente, hay que entender cómo escribir $k_1 h_2 k_1^{-1}$ en términos de H y K .

A modo de motivación, volvamos al caso en el que tenemos un grupo ambiente G . Como $H \trianglelefteq G$, K actúa en H por conjugación:

$$k \cdot h = k h k^{-1},$$

y esta acción induce un morfismo $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$. De esta manera, el producto se puede escribir como

$$(h_1 k_1)(h_2 k_2) = (h_1 (k_1 h_2 k_1^{-1})) (k_1 k_2) = (h_1 k_1 \cdot h_2) (k_1 k_2) = (h_1 \varphi(k_1)(h_2)) (k_1 k_2),$$

donde esta expresión depende únicamente de H , K y el morfismo φ , que está definido en términos de H y K .

Teorema. Sean H , K grupos y $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ un morfismo. Entonces, $H \times K$ tiene una estructura de grupo dada por

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 \varphi(k_1)(h_2), k_1 k_2),$$

con la cual $H \times 1$ y $1 \times K$ son subgrupos isomorfos a H y K respectivamente y, bajo esta identificación,

- $H \trianglelefteq H \times K$.
- $H \cap K = 1$.
- Para todos $h \in H$ y $k \in K$, $k h k^{-1} = \varphi(k)(h)$.

Veamos cómo sale lo último, lo demás es un ejercicio. Deshaciendo la identificación, tenemos

$$\begin{aligned}(1, k)(h, 1)(1, k)^{-1} &= ((1, k)(h, 1))(1, k^{-1}) = (\varphi(k)(h), k)(1, k^{-1}) \\ &= (\varphi(k)(h)\varphi(k)(1), kk^{-1}) = (\varphi(k)(h), 1),\end{aligned}$$

así que, pasando por la identificación, queda lo que queríamos.

Definición. Sean H, K grupos y $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ un morfismo. El **producto semidirecto (externo)** de H y K con respecto a φ es el grupo recién definido, y lo notamos $H \rtimes_{\varphi} K$.

Ejercicio. Sean H un grupo abeliano y $K = \langle x \rangle$ un grupo cíclico de orden 2 (ambos escritos en notación multiplicativa). Sea $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ definido por $\varphi(x)(h) = h^{-1}$ (invertir es morfismo ya que H es abeliano). Entonces, $H \trianglelefteq H \rtimes_{\varphi} K$ porque tiene índice 2 y además, por el teorema,

$$\begin{aligned}xhx^{-1} &= h^{-1} \\ xh &= h^{-1}x.\end{aligned}$$

Esto se parece mucho a lo que sucede en el grupo diedral y, de hecho, si $H \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, entonces $H \rtimes_{\varphi} K \simeq D_n$.

Como antes, tenemos un resultado que nos permite “reconocer” productos semidirectos:

Teorema. Sean G grupo, $H \trianglelefteq G$, $K \leq G$ tales que $H \cap K = 1$. Si $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ es el morfismo definido como $\varphi(k)(h) = khk^{-1}$, entonces $HK \simeq H \rtimes_{\varphi} K$.

Demostración. La función $f : G \rightarrow H \rtimes_{\varphi} K$, $f(hk) = (h, k)$ es una biyección. El hecho de que es un morfismo es la cuenta que hicimos antes para motivar la definición del producto:

$$\begin{aligned}f(h_1k_1h_2k_2) &= f((h_1k_1h_2k_1^{-1})(k_1k_2)) = (h_1k_1h_2k_1^{-1}, k_1k_2) \\ &= (h_1\varphi(k_1)(h_2), k_1k_2) = (h_1, k_1)(h_2, k_2) = f(h_1k_1)f(h_2k_2),\end{aligned}$$

por lo que es un isomorfismo. ■

Definición. Sea G grupo y sean $H, K \leq G$ tales que HK es un subgrupo, $H \trianglelefteq HK$ y $H \cap K = 1$. Llamamos a HK el **producto semidirecto (interno)** de H y K .

Como antes, gracias al Teorema, la diferencia entre las construcciones interna y externa es únicamente notacional.