Práctica 7

1. Sea A un dominio íntegro y M un A-módulo. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

   a) Si M es libre, entonces es sin torsión.

   b) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos y M es de torsión entonces $\mathrm{im}(f)$ es de torsión.

   c) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos y M es sin torsión entonces $\mathrm{im}(f)$ es sin torsión.

   d) Si N es sin torsión entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es sin torsión.

   e) Si M es de torsión y N es sin torsión entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$.

2. Calcular $t(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (la torsión de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo).

3. Sea A un dominio de ideales principales que no es un cuerpo y sea M un A-módulo. Probar:

   a) Si $p \in A$ es irreducible y $a \in A - \{0\}$, entonces $(A/\langle a\rangle)[p] \simeq A/\langle p^n\rangle$ donde
   $$n = \max\{k \in \mathbb{N}_0 : p^k | a\}.$$

   b) M es simple $\iff$ $\exists\, p \in A$ irreducible tal que $M \simeq A/\langle p\rangle$.

   c) M es un A-módulo sin torsión $\iff$ $\mathrm{Hom}_A(S, M) = 0$ para todo A-módulo simple S.

4. Sean A un dominio íntegro, $v_1, \ldots, v_n \in A^n$ y $P \in A^{n\times n}$ la matriz que tiene en la columna i el vector v_i. Probar lo siguiente.

   (a) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente si y solo si $\det(P) \neq 0$.

   (b) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera A^n si y solo si $\det(P) \in \mathcal{U}(A)$.

5. Sean A un anillo, M un A-módulo a izquierda y $S \subseteq M$ un submódulo. Probar que los siguientes enunciados son equivalentes.

   (a) S es un sumando directo de M.

   (b) La inclusión $\iota : S \hookrightarrow M$ es una sección.

   (c) La proyección al cociente $\pi : M \to M/S$ es una retracción.

6. Sea $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. Probar que $\langle(a_1, \ldots, a_n)\rangle$ es un sumando directo de $\mathbb{Z}^n$ si y solo si
   $$\mathrm{mcd}(a_1, \ldots, a_n) = 1.$$

7. Sea A un dominio de ideales principales y sea M un A-módulo de tipo finito (es decir finitamente generado). Probar:

   a) M es de torsión $\iff$ $\mathrm{Hom}_A(M, A) = 0$.

   b) M es indescomponible (es decir, no tiene sumandos directos propios) $\iff$ $M \simeq A$ o $\exists\, p \in A$ irreducible y $n \in \mathbb{N}$ tales que $M \simeq A/\langle p^n\rangle$.

8. Sea A un dominio de ideales principales y sea M un A-módulo. Probar:

   a) Si M es de tipo finito y S es un submódulo libre de M tal que M/S es sin torsión, entonces M es libre.

   b) Si M no es de torsión y M/S es de tipo finito con torsión para todo submódulo $S \neq 0$ de M, entonces $M \simeq A$. Deducir que si G es un grupo abeliano infinito tal que todo subgrupo no nulo tiene índice finito, entonces $G \simeq \mathbb{Z}$.

9. Sea p un primo positivo. Clasificar todos los grupos abelianos de orden p^3, p^4 y p^5.

10. Clasificar los grupos abelianos de orden 18, 45, 100 y 180.

11. *a*) Sea G un grupo abeliano finito y sea p un primo positivo que divide al orden de G. Probar que el número de elementos de orden p en G es coprimo con p.

    b) Para cada grupo abeliano G de orden p^2q^2 (donde p y q son primos distintos) determinar cuántos elementos de orden pq y cuántos elementos de orden pq^2 hay en G.

12. Caracterizar los grupos abelianos finitamente generados tales que:

    a) Todo subgrupo propio de G es cíclico.

    b) Todo subgrupo propio de G es de orden primo.

    c) G posee exactamente 2 subgrupos propios no nulos.

    d) G posee exactamente 3 subgrupos propios no nulos.

    e) Todo subgrupo propio no nulo de G es maximal.

    f) Para todo par de subgrupos S y T de G, $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

    g) El orden de todo elemento no nulo de G es primo.

    h) G/S es cíclico para todo subgrupo S no nulo de G.

    i) Todo par de subgrupos propios no nulos son isomorfos.

13. Calcular los factores invariantes (coeficientes de estructura) de los siguientes grupos abelianos:

    a) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$.

    b) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$.

    c) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$.

    d) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.

    e) G un grupo abeliano de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

    f) G un grupo abeliano de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 de G es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

14. Sean p, q y r primos positivos. Determinar la cantidad de grupos no isomorfos de orden n, en cada uno de los siguientes casos:

    a) $n = p^6q^3r$.

b) $n = p^2q^4r^5$.

c) $n = p^3q^4$.

15. *a*) Sea G un grupo abeliano de orden n. Probar que si d es un divisor de n, G posee subgrupos y grupos cocientes de orden d.

    b) Sea $n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué divisores d de n existe un grupo abeliano de orden n y exponente d?

    c) Caracterizar los grupos abelianos finitos de orden menor o igual que 100 de exponente 9, 20 y 21.

    d) Sea G un grupo abeliano y sea $x \in G$ un elemento tal que $\operatorname{ord}(x) = \exp(G)$. Probar que $\langle x \rangle$ es un sumando directo de G.

16. Caracterizar todos los $\mathbb{Z}[i]$-módulos de 5, 6, 21 y 65 elementos.

17. Caracterizar los $K[X]$-módulos de dimensión 1, 2 y 3 sobre K, para $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Comparar.