

PRÁCTICA 6

1. Probar que:
 - a) Un K -espacio vectorial V es noetheriano si y solo si $\dim_K V < \infty$.
 - b) Un K -espacio vectorial V es artiniano si y solo si $\dim_K V < \infty$.
2. Probar las siguientes afirmaciones.
 - a) Un grupo abeliano artiniano es de torsión.
 - b) Un grupo abeliano es artiniano y noetheriano si y solo si es finito.
3. Sean A un anillo, M un A -módulo a izquierda y $f \in \text{End}_A(M)$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definimos $K_n = \ker f^n$ e $I_n = \text{im } f^n$. Probar que:
 - a) Si $K_1 = K_2$, entonces $K_1 \cap I_1 = 0$.
 - b) Si $I_1 = I_2$, entonces $K_1 + I_1 = M$.
 - c) Si M es noetheriano existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $K_n \cap I_n = 0$.
 - d) Si M es noetheriano y f es sobreyectivo, entonces f es un automorfismo.
4. Probar que un dominio íntegro artiniano es un cuerpo.
5. Sean A un anillo y G un grupo. Probar que $A[X]$ y $A[G]$ son A -módulos libres.
6. Sea A un anillo comutativo.
 - a) Probar que cualquier subconjunto $\{a_1, a_2\} \subseteq A$ es linealmente dependiente. Concluir que si un ideal no nulo $I \subseteq A$ es un A -módulo libre, entonces $I \cong A$ como A -módulo –de donde sigue que I es un ideal principal.
 - b) Sea $A = \mathbb{Z}[X]$. Probar que $I = \langle 2, X \rangle$ no es un A -módulo libre.
7. **Un producto arbitrario de módulos libres puede no ser libre.** Sea $M = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$; los elementos de M son sucesiones de números enteros indexadas por \mathbb{N} . El objetivo de este ejercicio es probar que M no es un \mathbb{Z} -módulo libre. Sea N el submódulo de M formado por las sucesiones de soporte finito –es decir, aquellas que tienen finitos coeficientes no nulos. Supongamos que M es un \mathbb{Z} -módulo libre con base B .
 - a) Probar que N es numerable.
 - b) Probar que existe un subconjunto $B_1 \subseteq B$ tal que N está contenido en el submódulo N_1 generado por B_1 . Probar que N_1 también es numerable.
 - c) Sea $\overline{M} = M/N_1$. Probar que \overline{M} es un \mathbb{Z} -módulo libre. Deducir que si $\bar{x} \in \overline{M}$ es no nulo, entonces existen finitos enteros k tales que $\bar{x} = k\bar{y}$ para algún $\bar{y} \in \overline{M}$ (\bar{y} depende de k).
 - d) Sea $S = \{(b_1, b_2, b_3, \dots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \mid b_i = \pm i!\text{ para todo }i\}$. Probar que S es no numerable y deducir que existe $s \in S$ con $s \notin N_1$.
 - e) Mostrar que la suposición de que M es libre lleva a una contradicción: Por d) podemos elegir $s \in S$ con $s \notin N_1$. Probar que para cada entero k existe algún $y \in M$ tal que $\bar{s} = k\bar{y}$, contradiciendo c).

8. Probar que \mathbb{Q} no es un \mathbb{Z} -módulo libre. ¿Es proyectivo?
9. Sean R un anillo y $\{M_i : i \in I\}$ una familia de R -módulos. Probar que si cada M_i es proyectivo, entonces $\bigoplus_{i \in I} M_i$ es proyectivo y que si cada M_i es inyectivo entonces $\prod_{i \in I} M_i$ es inyectivo.
10. **Bases duales.** Sean A un anillo y P un A -módulo a izquierda. Una *base dual* para P es una familia $\{(x_i, f_i)\}_{i \in I}$ donde $(x_i, f_i) \in P \times P^* = P \times \text{Hom}_A(P, A)$ para cada $i \in I$, que cumple las siguientes condiciones:
- para todo $x \in P$ el conjunto $\{i \in I : f_i(x) \neq 0\}$ es finito, y
 - para todo $x \in P$ vale la igualdad $x = \sum_{i \in I} f_i(x)x_i$.
- Notar que (i) implica que la suma en (ii) tiene sentido.
- Mostrar que un A -módulo P es proyectivo si y solo si posee una base dual.
 - Mostrar que un A módulo P es proyectivo y finitamente generado si y solo si posee una base dual finita.
11. Para cada A -módulo a izquierda M , sea $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$ con la estructura de A -módulo a derecha inducida por la estructura de A -módulo a derecha de A .
- Mostrar que si P es proyectivo y finitamente generado entonces P^* también lo es.
 - Mostrar que si P es proyectivo y finitamente generado entonces el morfismo canónico $P \rightarrow P^{**}$ es un isomorfismo.
12. Sea A un grupo abeliano finito.
- Probar que A no es un \mathbb{Z} -módulo proyectivo.
 - Probar que A no es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo.
13. Probar que \mathbb{Z} no es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo, pero \mathbb{Q} y \mathbb{Q}/\mathbb{Z} sí lo son.

14. **Lema de los cinco.** Consideremos un diagrama comutativo de R -módulos

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 \longrightarrow M_5 \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_4 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 \longrightarrow N_5 \end{array}$$

y supongamos que las dos filas son exactas. Probar

- Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ y α_5 son isomorfismos, entonces α_3 es un isomorfismo.
- Si α_1 es sobreyectivo y α_2 y α_4 son inyectivos, entonces α_3 es inyectivo.
- Si α_5 es inyectivo y α_2 y α_4 son sobreyectivos, entonces α_3 es sobreyectivo.

15. **Resoluciones proyectivas.** Sea A un anillo. Probar las siguientes afirmaciones.

- Para cada A -módulo M existe un diagrama

$$\cdots \rightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$$

de A -módulos y morfismos de A -módulos que es exacto, y en el que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ el módulo P_n es proyectivo. El morfismo ε se llama *aumentación*, y el diagrama obtenido al reemplazar ε por 0 es llamado una *resolución proyectiva* de M .

b) Los A -módulos P_n pueden elegirse libres para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

c) Si $f: M \rightarrow N$ es un morfismo de A -módulos y

$$\cdots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$$

y

$$\cdots \rightarrow Q_n \rightarrow Q_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow 0$$

son resoluciones proyectivas de M y N , respectivamente, entonces para cada $n \geq 0$ existe un morfismo $f_n: P_n \rightarrow Q_n$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & P_n & \rightarrow & P_{n-1} & \rightarrow & \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_1 \quad \downarrow f_0 \quad \downarrow f \\ \cdots & \rightarrow & Q_n & \rightarrow & Q_{n-1} & \rightarrow & \cdots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow N \rightarrow 0 \end{array}$$

d) Encontrar resoluciones proyectivas para

- 1) un A -módulo proyectivo;
- 2) el \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}_n para cada $n \in \mathbb{Z}$;
- 3) el $\mathbb{k}[X]$ -módulo $S = \mathbb{k}[X]/\langle X \rangle$.

16. Sea C un grupo cíclico finito no trivial. Sea $\varepsilon: C \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$, $\varepsilon(x)(\phi) = \phi(x)$. Probar que el morfismo ε no es inyectivo.

17. Sean M un grupo abeliano y $x \in M$ no nulo. Probar que existe $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tal que $\phi(x) \neq 0$.

18. Sea M un grupo abeliano y sea $I(M) = \prod_{f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Sea $\text{ev}: M \rightarrow I(M)$, $\text{ev}(m)_f = f(m)$ ($f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$). Probar que ev es un monomorfismo.

19. Sea R un anillo y sea \mathcal{A} un grupo abeliano. Si M es un R -módulo a derecha, consideremos a $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathcal{A})$ con la estructura de R -módulo a izquierda definida por $(r \cdot f)(m) = f(mr)$. Si N es un módulo a izquierda, equipamos $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathcal{A})$ con la estructura de R -módulo a derecha dada por $(f \cdot r)(n) = f(rn)$. Sea M un R -módulo a derecha. Probar que

$$\tau: \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathcal{A})), \quad \tau(f)(m)(r) = f(mr)$$

es un isomorfismo de grupos abelianos.

20. Probar que si \mathcal{I} es un grupo abeliano inyectivo, entonces $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathcal{I})$ es un R -módulo a derecha inyectivo.

21. Probar que si R es un anillo y M un R módulo a derecha. Sea

$$\text{ev}: M \rightarrow \prod_{\text{Hom}_R(M, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

la aplicación dada por $\text{ev}(m)_f = f(m)$ para $f \in \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$. Probar que ev es un monomorfismo R -lineal.