

PRÁCTICA 4

Algunas definiciones.

En esta práctica todos los anillos tienen unidad. Sea A un anillo. El *centro* de A es el subconjunto

$$\mathcal{Z}(A) := \{a \in A \mid ax = xa, \text{ para todo } x \in A\}.$$

Un elemento $a \in A$ se dice un *divisor de cero a izquierda* si existe $b \in A \setminus \{0\}$ tal que $ab = 0$. Los divisores de cero a derecha se definen en forma análoga. A se dice un *dominio* si no tiene divisores de cero no nulos. A se dice un *dominio íntegro* si es un dominio conmutativo.

Ejercicios

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar en cada uno de los siguientes casos que $(A, +, \cdot)$ es un anillo.

- a) $M_n(\mathbb{R})$ con la suma y el producto de matrices.
 - b) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ con $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados y con la suma y el producto de números complejos.
 - c) $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ con X un conjunto, $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de subconjuntos de X y Δ la diferencia simétrica.
 - d) $(\text{End}(G), +, \circ)$ con G grupo abeliano.
 - e) $\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g \in G} a_g \cdot g \mid a_g \in \mathbb{Z}, a_g \neq 0, \text{ sólo para finitos } g \in G\}$ con G grupo y
- $$(\sum a_g \cdot g) + (\sum b_g \cdot g) = \sum (a_g + b_g) \cdot g; \quad (\sum a_g \cdot g) \cdot (\sum b_g \cdot g) = \sum (\sum_{g_1 g_2 = g} a_{g_1} b_{g_2}) \cdot g.$$
- f) $A^X = \{f : A \rightarrow X\}$, donde A es un anillo, X un conjunto y

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x); \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

- 2. Decidir cuáles de los anillos del ejercicio anterior son conmutativos, dominios íntegros, anillos de división o cuerpos.
- 3. Dar ejemplos de un anillo que no sea dominio íntegro y de un dominio íntegro que no sea anillo de división.
- 4. Hallar los divisores de cero y las unidades del anillo $A = \mathcal{C}[0, 1]$ de funciones continuas definidas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} .
- 5. Sea A un anillo. El *grupo de unidades* de A es el conjunto

$$\mathcal{U}(A) = \{u \in A : u \text{ es inversible}\}.$$

- Probar que la multiplicación de A hace de $\mathcal{U}(A)$ un grupo.
- Probar que $\mathcal{U}_n := \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) = \{m \in \mathbb{Z}_n : \text{mcd}(m, n) = 1\}$. Deducir que \mathbb{Z}_n es cuerpo si y sólo si n es primo.
- Sea G un grupo. Probar que $1 \cdot G \subset \mathcal{U}(\mathbb{Z}[G])$. Mostrar que no vale la igualdad.

6. Hallar las unidades de \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, \mathbb{Q} , $\mathbb{Z}[X]$.
7. Si A, B son anillos, denotamos $\text{Hom}(A, B)$ al conjunto de morfismos $A \rightarrow B$.
Probar que si A es un anillo y G un grupo, la aplicación,

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}[G], A) \rightarrow \text{Hom}(G, \mathcal{U}(A))$$

$$f \mapsto f|_G,$$

es una biyección.

8. Sea $x \in A$ un elemento nilpotente. Probar que $1+x$ y $1-x$ son unidades.
9. Sea A un dominio íntegro finito. Probar que A es un cuerpo.
10. En cada uno de los siguientes casos, decidir si B es un subanillo de A :

- a) $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{Q}$.
- b) $A = \mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{N}$.
- c) $A = \mathbb{C}$ y $B = \mathbb{Z}[i]$.
- d) $A = \mathbb{Z}[X]$ y $B = \{f = \sum_{i=0}^d a_i X^i \in A \mid a_1 = 0\}$.

11. Sea B un subanillo de un anillo A . Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
- a) A dominio íntegro $\Rightarrow B$ dominio íntegro.
 - b) B dominio íntegro $\Rightarrow A$ dominio íntegro.
 - c) A cuerpo $\Rightarrow B$ cuerpo.
 - d) B cuerpo $\Rightarrow A$ cuerpo.
12. Sean K un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Probar lo siguiente.

- Sean $V \subseteq K^n$ un subespacio vectorial e I_V el subconjunto de $M_n(K)$ formado por todas las matrices cuyas filas pertenecen a V . Probar que I_V es un ideal a izquierda de $M_n(K)$.
- Probar que todo ideal a izquierda de $M_n(K)$ es de la forma definida en el ítem anterior.
(Sugerencia: tomar V como el conjunto formado por todas las filas de todas las matrices del ideal y probar que es un subespacio).
- Probar que $M_n(K)$ es *simple* (i.e. no tiene ideales biláteros no triviales).
- Probar que $\mathcal{Z}(M_n(K)) = K \cdot I$.

13. Hallar todos los ideales de \mathbb{Z} y de $\mathbb{Q}[X]$.
14. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que $\langle a, b \rangle = \langle \text{mcd}(a, b) \rangle$.
15. Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados.
- a) Probar que si $a + b\sqrt{d} = a' + b'\sqrt{d}$ con $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$, entonces $a = a'$ y $b = b'$.
 - b) Probar que si d es impar, $\{a + b\sqrt{d} \mid a \equiv b \pmod{2}\}$ es un ideal de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
16. Hallar un ideal de $\mathbb{Z}[X]$ que no pueda generarse por un único elemento.

17. Sea A un anillo. Probar que A es un anillo de división si y sólo si los únicos ideales a izquierda de A son 0 y A .
18. Sea $n \in \mathbb{N}$. En cada uno de los siguientes casos, decidir si f es un morfismo de anillos:
- $f : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(g) = g(1)$.
 - $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$.
 - $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(C) = \det(C)$.
 - $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $f(m) = m^p$, con p un número primo.
19. Determine la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones.
- Todo morfismo de anillos no nulo que sale de un anillo de división es inyectivo.
 - Si A es un anillo conmutativo tal que todo morfismo de anillos no nulo que sale de A es inyectivo, entonces A es un cuerpo.
 - Si A es un anillo tal que todo morfismo no nulo que sale de A es inyectivo, entonces A es un anillo de división.
20. Probar que el único morfismo de anillos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función identidad.
21. Hallar todos los morfismos de anillos $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.
22. Probar que $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 - 1 \rangle$ y $\mathbb{R}[X, Y]/\langle XY \rangle$ no son cuerpos.
23. Hallar los divisores de cero y las unidades de $\mathbb{Z}[X]/\langle X^3 \rangle$.
24. Sea $n \in \mathbb{N}$. Mostrar isomorfismos entre los siguientes anillos.
- $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + 2i \rangle$ y \mathbb{Z}_5 .
 - $\mathbb{R}[X, Y, Z]/\langle Y - X^5, Z - Y^5 \rangle$ y $\mathbb{R}[X]$.
 - $\mathbb{Q}[X]/\langle X^3 + X \rangle$ y $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(i)$.
 - $\mathbb{Z}[X]/\langle X^n - 1 \rangle$ y $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$.
25. Sea $L_n = \mathbb{Z}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*\}/I$, donde $I = \langle \alpha_i^* \alpha_j - \delta_{i,j}, \sum_i \alpha_i \alpha_i^* - 1 \rangle$.
- Probar que $L_n \neq 0$.
 - Sea L_n^{op} el anillo opuesto (i.e. el mismo grupo abeliano con producto $x \cdot_{op} y = yx$). Probar que existe un único isomorfismo $L_n \rightarrow L_n^{op}$, que manda $\alpha_i \mapsto \alpha_i^*$ y $\alpha_i^* \mapsto \alpha_i$.
 - Sea $x \mapsto x^*$ el isomorfismo del ítem anterior. Probar que $x^{**} = x$.
 - Sea $u \in L_n$ tal que $u^*u = uu^* = 1$. Probar que hay un único ϕ_u endomorfismo de L_n tal que $\phi(x^*) = \phi(x)^*$, $(x \in L_n)$ y tal que $\phi(\alpha_j) = u\alpha_j$, $(j = 1, \dots, n)$.
 - Probar que $u = \sum_j \phi_u(\alpha_j)\alpha_j^*$.
 - Probar que si ϕ es un endomorfismo de L_n tal que $\phi(x^*) = \phi(x)^*$, $(x \in L_n)$ entonces existe $u \in L_n$ tal que $u^*u = uu^* = 1$ y tal que $\phi = \phi_u$.