

PRÁCTICA 3

1. Probar en cada uno de los siguientes casos que el grupo G actúa sobre el conjunto X . En cada caso calcular ${}^G X$, las G -órbitas de X , y el estabilizador de cualquier elemento de X
 - (a) $G = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ con } a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ y $f \cdot x = f(x)$
 - (b) $G = \mathbb{R}^\times$, $X = \mathbb{R}_{>0}$ y $a \cdot x = x^a$ con $a \in \mathbb{R}^\times$ y $x \in \mathbb{R}_{>0}$
 - (c) $G = SL(2, \mathbb{Z})$, $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$
2. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y $S \triangleleft G$. Determinar la condición necesaria y suficiente para que exista una acción de G/S en X tal que $\bar{a} \cdot x = a \cdot x \quad \forall a \in G \text{ y } x \in X$.
3. Sea X un conjunto finito. Determinar el número de acciones de $\mathbb{Z}$ sobre X .
4. Sea G un grupo finito y sean H, K subgrupos de G . Sea $X = HK$.
 - (a) Probar que la siguiente fórmula define una acción de $H \times K$ en X : $(h, k) \cdot x = hxk^{-1}$.
 - (b) Probar que $\mathcal{O}_1 = X$ y probar que el estabilizador del 1 es isomorfo a $H \cap K$.
 - (c) Deducir que $|H||K| = |HK||H \cap K|$.
5. Sea G un grupo.
 - (a) Probar que si $|G| = p^n$ con p primo y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{Z}(G) \neq 1$.
 - (b) Probar que si $G/\mathcal{Z}(G)$ es cíclico entonces G es abeliano.
 - (c) Probar que si $|G| = p^2$ con p primo entonces G es abeliano.
 - (d) Caracterizar todos los grupos de orden p^2 .
 - (e) Dar un ejemplo de un grupo G no abeliano tal que $G/\mathcal{Z}(G)$ sea abeliano.
6. Sea p un primo.
 - (a) Sea G un grupo no abeliano tal que $|G| = p^3$. Probar que $\mathcal{Z}(G) = [G, G]$ y calcular $|\mathcal{Z}(G)|$.
 - (b) Calcular $[G, G]$ con $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$.
7. Sea G un grupo tal que $|G| = 2n$, G tiene n elementos de orden 2 y los restantes forman un subgrupo H . Probar que entonces n es impar y $H \triangleleft G$.
8. Sea p primo y $|G| = n$. Entonces existe k tal que $n = p^k \Leftrightarrow \forall x \in G, \text{ord}(x) = p^s$ para algún s . (s depende de x)
9. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ coprimos y sea G un grupo de orden mn . Probar que si G posee exactamente un subgrupo M de orden m y exactamente un subgrupo N de orden n , entonces G es isomorfo al producto directo de M y N .
10. (a) Sean $f : H \rightarrow H'$ y $g : K \rightarrow K'$ dos morfismos de grupos. Probar que la función $f \times g : H \times K \rightarrow H' \times K'$ definida por $(h, k) \mapsto (f(h), g(k))$ es un morfismo de grupos.
(b) Sean H y K dos grupos y sean $S \triangleleft H$ y $T \triangleleft K$. Probar que $S \times T \triangleleft H \times K$ y que

$$\frac{H \times K}{S \times T} \simeq (H/S) \times (K/T).$$

11. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G tales que $G = H \rtimes K$.

- (a) Probar que si $K \triangleleft G$ entonces $kh = hk, \forall h \in H, \forall k \in K$.
- (b) Deducir que G es abeliano si y sólo si H y K son abelianos y $K \triangleleft G$.
12. Sea $n \geq 3$. Para $G = \mathbb{D}_n, \mathbb{S}_n$, descomponer G como producto semidirecto $G \cong H \rtimes_{\phi} K$ con K cíclico no trivial.
13. ¿Es $\mathcal{H}$ isomorfo a algún producto semidirecto no trivial?
14. Determinar si existe un grupo K tal que G sea el producto semidirecto de H y K en cada uno de los siguientes casos.
- (a) $G = \mathbb{C}^{\times}, \quad H = S^1$
- (b) $G = G_{12}, \quad H = G_3$
- (c) $G = G_{12}, \quad H = G_2$
- (d) $G = \mathbb{C}, \quad H = \mathbb{R}$
- (e) $G = GL(n, \mathbb{C}), \quad H = SL(n, \mathbb{C})$
- (f) $G = \mathbb{S}_4, \quad H = \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$
15. Sean $H = \mathbb{Z}_3$ y $K = \mathbb{Z}_4$.
- (a) Describir todos los productos semidirectos $G = H \rtimes_{\phi} K$.
- (b) Mostrar que uno de estos es no abeliano y no isomorfo a $\mathbb{A}_4$.
16. Calcular todos los p -subgrupos de Sylow de:
- $$\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3.$$
17. Sea G un grupo, $|G| = pq, p > q$ primos tal que q no divide a $p - 1$. Probar que G es cíclico.
18. Sean p, q primos, $|G| = p^2q$. Probar que G no es simple.
19. Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes: 30, 36, 56, 96, 200, 204, 260, 2540.
20. Sea G con $|G| < \infty$ y $p < q$ primos tal que p^2 no divide a $|G|$. Sean H_p y H_q subgrupos de Sylow de G con $H_p \triangleleft G$. Probar
- (a) $H_p H_q$ es subgrupo de G .
- (b) $H_p H_q \triangleleft G \Rightarrow H_q \triangleleft G$.
21. Clasificar todos los grupos de orden 30.
- Sugerencia:* Probar primero que un grupo de orden 30 tiene un subgrupo normal cíclico de orden 15.