

PRÁCTICA 2

Sea G un grupo y sean X, Y subconjuntos no vacíos de G . Se define

$$X \cdot Y = XY = \{x \cdot y : x \in X, y \in Y\}.$$

Si $x \in G$ escribimos $xH = \{x\}H$.

1. Sea G un grupo y H, K subgrupos de G .
 - (a) Probar que HK es un subgrupo de G si y solo si $HK = KH$.
 - (b) Probar que si H o K es normal, entonces HK es un subgrupo.
 - (c) Si H y K son normales, entonces HK es un subgrupo normal.
 - (d) Dar un ejemplo de un grupo G y dos subgrupos H y K tales que HK no sea un subgrupo.
2. Decidir cuáles de los siguientes subgrupos son normales
 - (a) $G = \mathbb{D}_4$, $H = \{1, r, r^2, r^3\}$.
 - (b) $G = GL_2(\mathbb{C})$, $H = \mathcal{H}$.
 - (c) $G = GL_n(\mathbb{R})$, $H = SL_n(\mathbb{R})$.
3. Sea G es un grupo abeliano. Probar que todo subgrupo es normal.
Probar que el grupo $\mathcal{H}$ es un contraejemplo para la recíproca de esta afirmación.
4. Dados los siguientes subgrupos de $\mathbb{S}_4$

$$H = \{id, (1\ 2)(3\ 4)\} \quad K = \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

$$U = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$$
 - (a) Probar que $H \triangleleft K$, $K \triangleleft \mathbb{A}_4$ y $K \triangleleft \mathbb{S}_4$.
 - (b) Probar que H no es normal en $\mathbb{A}_4$ ni en $\mathbb{S}_4$.
 - (c) Determinar si $U \triangleleft \mathbb{S}_4$.
5. Encontrar todos los subgrupos normales de G .
 - (a) $G = \mathbb{D}_n$, donde n es impar.
 - (b) $G = \mathbb{D}_n$, donde n es par.
6. Sean G y G' grupos y sea $f : G \rightarrow G'$ un morfismo.
 - (a) Probar que $\ker(f) \triangleleft G$
 - (b) ¿Es $\text{im}(f) \triangleleft G'$?
 - (c) Probar que si H es un subgrupo normal de G , entonces existe un grupo G' y un epimorfismo $f : G \rightarrow G'$ tal que $\ker(f) = H$.
7. Sea G un grupo y H un subgrupo tal que $|G : H| = 2$. Probar que $H \triangleleft G$.
8. Hallar un sistema de representantes de G módulo S en los siguientes casos y determinar $|G : S|$
 - (a) $G = \mathbb{R}$, $S = \mathbb{Z}$
 - (b) $G = \mathbb{D}_n$, $S = \langle r \rangle$
 - (c) $G = GL_n(K)$, $S = SL_n(K)$, donde K es un cuerpo.
 - (d) $G = \mathbb{C}^\times$, $S = S^1$
9. Calcular todos los cocientes por subgrupos normales de $\mathbb{S}_3$, $\mathbb{D}_4$ y $\mathcal{H}$. Es decir, caracterizar todos los grupos que pueden obtenerse como cocientes de los grupos mencionados.

10. Probar que

- (a) $\frac{\mathbb{C}^\times}{\mathbb{R}_{>0}} \simeq S^1$
- (b) $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_m$
- (c) $\frac{\mathbb{Q}^\times}{\mathbb{Q}_{>0}} \simeq G_2$
- (d) $\frac{S^1}{G_n} \simeq S^1$
- (e) $\frac{G_n}{G_m} \simeq G_{\frac{n}{m}}$ para $m \mid n$

11. Verificar que $H \triangleleft G$ y calcular G/H

- (a) $G = \mathbb{S}_4$, $H = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
- (b) $G = \mathbb{D}_6$, $H = \{1, r^3\}$.

12. (a) Sea $f : G \longrightarrow G'$ un epimorfismo y sea $H \triangleleft G$. Si $H' = f(H)$, probar que

- i. $H' \triangleleft G'$
- ii. Si f es un isomorfismo, $G/H \simeq G'/H'$
- (b) Si $G \simeq G'$, $H \simeq H'$, $H \triangleleft G$ y $H' \triangleleft G'$, ¿es $G/H \simeq G'/H'$?

13. Sea G un grupo y sean H, K subgrupos normales de G . Sean π_H y π_K las proyecciones de G en H y K respectivamente. Probar que la aplicación

$$f : G/(H \cap K) \rightarrow G/H \times G/K$$

definida por $f(\bar{x}) = (\pi_H(x), \pi_K(x))$ es un monomorfismo.

14. Sea G un grupo. Sea $a \in G$ y sea $I_a : G \longrightarrow G$ definida por $I_a(g) = a.g.a^{-1}$.

- (a) Probar que I_a es un automorfismo de G (se denomina automorfismo interior de G).
- (b) Probar que la aplicación $I : G \longrightarrow \text{Aut}(G)$, definida por $I(a) = I_a$, es un morfismo de grupos y verificar que

$$\ker(I) = \{a \in G : ag = ga, \forall g \in G\}.$$

Este subgrupo se llama el *centro de G* y lo notamos $\mathcal{Z}(G)$.

- (c) Probar que $\text{im}(I)$ es un subgrupo normal de $\text{Aut}(G)$. A este grupo lo notaremos $\text{Int}(G)$.
- (d) Deducir que $G/\mathcal{Z}(G) \simeq \text{Int}(G)$.

15. Hallar $\mathcal{Z}(G)$ (el centro de G) en cada uno de los siguientes casos:

- (a) $G = \mathbb{D}_n$
- (b) $G = \mathbb{S}_4$
- (c) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$
- (d) $G = \mathcal{H}$
- (e) $GL_n(\mathbb{R})$
- (f) $SL_n(\mathbb{R})$

16. Sea G un grupo. Definimos $[G, G]$, el *conmutador de G* , como el subgrupo de G generado por todos los elementos de la forma $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$.

- (a) Probar que $[G, G]$ es un subgrupo normal de G .
- (b) Probar que $G/[G, G]$ es un grupo abeliano.
- (c) Sea $f : G \rightarrow K$ un morfismo donde K es un grupo abeliano. Probar que f se factoriza unívocamente por $G/[G, G]$, esto es, existe un único morfismo $\bar{f} : G/[G, G] \rightarrow K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & K \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ G/[G, G] & & \end{array}$$

- (d) Sea $H \subset G$ un subgrupo. Probar que

$$[G, G] \subseteq H \Leftrightarrow H \triangleleft G \text{ y } G/H \text{ es abeliano.}$$

17. Hallar $[G, G]$ en cada uno de los siguientes casos
 - (a) $G = \mathbb{D}_n$
 - (b) $G = \mathcal{H}$
 - (c) $G = \mathbb{S}_4$
 - (d) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$
18. Probar que los únicos grupos no abelianos de orden 8 son $\mathcal{H}$ y $\mathbb{D}_4$.
19. Sea p un primo mayor o igual que 3. Probar que si $|G| = 2p$ entonces G es abeliano o $G \simeq \mathbb{D}_p$.
20. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.
 - (a) Si $|G : H| = 2$ y H es abeliano entonces $H \subset \mathcal{Z}(G)$.
 - (b) Si $|G| = n$ y k divide a n , entonces G tiene un elemento de orden k .
 - (c) Si $|G| = n$ y k divide a n , entonces G tiene un subgrupo de orden k .
 - (d) Si $\forall x \in G$, se tiene que $\text{ord}(x) < \infty \Rightarrow |G| < \infty$.
 - (e) Si p divide a $|G|$, entonces existe H subgrupo tal que $|G : H| = p$.
 - (f) Los elementos de orden finito de un grupo G forman un subgrupo.
21. Probar que si G es un grupo abeliano simple entonces existe un primo p tal que $G \simeq \mathbb{Z}_p$.
22. Sean G un grupo y $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal de G . Probar que G es resoluble si y solo si N y G/N lo son.