

Geometría Diferencial 2011

Primer Parcial - 12/05/11

Nombre y Apellido	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 5 horas.

- Sean M y N variedades diferenciales y sea $T : M \rightarrow N$ una función continua tal que para toda función diferenciable $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que $f \circ T : M \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. Probar que T es diferenciable.
- Probar que si $f : M \rightarrow N$ es suave e inyectiva entonces $\dim M \leq \dim N$.
- Si M es una variedad con borde, el espacio tangente $T_p M$ en un punto p del borde se define (análogamente a como vimos en las prácticas) como clases de equivalencia de vectores en las cartas, donde dos vectores r y s en dos cartas (U, φ) y (V, ψ) respectivamente son equivalentes si $d_{\psi(p)}(\varphi \circ \psi^{-1})(s^t) = r^t$. A pesar de que una carta lleva un entorno del punto p a H^n en lugar de \mathbb{R}^n , dichos vectores recorren todo \mathbb{R}^n .
Definir en las cartas las nociones de “el vector v es tangente al borde”, “apunta hacia adentro” y “apunta hacia afuera” y mostrar que estas nociones pasan bien al cociente, es decir que es correcto usar estas nociones en $T_p M$.
- Si $f : M \rightarrow N$ es suave, entonces $df : TM \rightarrow TN$ es suave.
 - Si f además es biyectiva y X es un campo en M definir dfX de manera natural tal que para cada $q \in N$, $(dfX)(q)$ pertenezca a $T_q N$.
 - Demostrar que si f es difeomorfismo y X es un campo suave en M , entonces dfX resulta un campo suave en N .
 - Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$. Exhibir un campo suave X en \mathbb{R} tal que dgX no sea suave.
- Si G es una variedad diferencial de dimensión n que resulta un grupo con multiplicación dada por una $M : G \times G \rightarrow G$ suave.
 - Probar que $d_{(g^{-1}, g)} M|_{(\{0\} \times T_g G)}$ tiene rango n .
 - Demostrar que tomar inversa $inv : G \rightarrow G$ resulta suave.

Sugerencia (para la primera parte): Use que $L_{g^{-1}} = M \circ i$ es un difeomorfismo, donde $i : G \rightarrow G \times G$ está dada por $i : x \mapsto (g^{-1}, x)$.