

Geometría Diferencial 2011

Práctica 4 - Campos de vectores

1. Sea M una variedad, $p \in M$ y $v \in T_p M$ un vector tangente. Probar que existe un campo $X \in \Gamma(TM)$ tal que $X(p) = v$.
2. Sea $p \in M$ y X un campo definido en un entorno de p tal que $X(p) \neq 0$. Probar que existe una carta (U, ϕ) tal que $X|_U = \frac{\partial}{\partial \phi_1}$.
3. Sea $p \in M$ y X_1, \dots, X_k campos definidos en un entorno de p tales que los vectores $X_1(p), \dots, X_k(p)$ son l.i. en $T_p M$. Probar que existe un entorno U de p tal que $\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}$ es un conjunto l.i. para todo $q \in U$.
4. Sea $M = \mathbb{R}^2$. Identificando $T_p M$ con M de la manera natural, probar que no existe una carta (U, ϕ) tal que los campos $\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \frac{\partial}{\partial \phi_2}$ coincidan respectivamente con los campos $(x, y) \mapsto (1, 0), (x, y) \mapsto (0, y(x^2 + 1))$.
5. Una variedad M es *paralelizable* si existen campos X_1, \dots, X_m tales que para todo $p \in M$ el conjunto $\{X_1(p), \dots, X_m(p)\}$ es una base de $T_p M$.
 - a) Probar que S^1 y S^3 son paralelizables;
 - b) Probar que el toro T^n es paralelizable;
 - c) Probar que si M es paralelizable entonces TM es difeomorfa a $M \times \mathbb{R}^d$;
 - d) Hallar un ejemplo de variedad M que no sea paralelizable.
6. Sea G un grupo de Lie y notemos $L_g : G \rightarrow G$ el difeomorfismo $L_g(h) = gh$. Decimos que un campo $X \in \Gamma(TG)$ es *invariante a izquierda* si para todos g, h en G se tiene $(dL_g)(X(h)) = X(gh)$. Es decir, si $(dL_g)X = XL_g$.
 - a) Probar que si dos campos invariantes a izquierda coinciden en un punto entonces coinciden en todo G .
 - b) Probar que si $v \in T_g(G)$, existe un único campo invariante a izquierda X tal que $X(g) = v$.
 - c) Deducir que hay un isomorfismo entre $T_e(G)$ y el espacio de campos invariantes a izquierda.
 - d) Probar que todo grupo de Lie es paralelizable.
7. Sea (U, ϕ) una carta de M . Probar que para todos i y j se tiene $[\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \frac{\partial}{\partial \phi_j}] = 0$.
8. Dados X, Y campos en \mathbb{R}^n , dar una fórmula general para el conmutador $[X, Y]$.
9. Dados campos X, Y en una variedad M y funciones diferenciables f, g en $\mathcal{D}(M, \mathbb{R})$ probar la formula de Lie-Rinehart:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$$

10. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial V junto con una aplicación bilineal $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ satisfaciendo las siguientes dos condiciones:

Antisimetría: $[X, Y] = -[Y, X] \forall X, Y \in V$;

Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \forall X, Y, Z \in V$.

Probar que $\Gamma(TM)$ es un álgebra de Lie.

11. Probar que si G es un grupo de Lie y X, Y son campos invariantes a izquierda entonces $[X, Y]$ es invariante a izquierda. Deducir que $\mathcal{G} = T_e G$ hereda una estructura de álgebra de Lie.
12. Si $G = GL_n(\mathbb{R})$ probar que para todas A, B en $T_e G \cong M_n(\mathbb{R})$ se tiene que

$$[A, B] = AB - BA.$$

13. Sea $f : M \rightarrow N$ diferenciable. Un par de campos $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(TN)$ se dicen *f-relacionados* si $Y(f(p)) = (df)(X(p))$ para todo $p \in M$, es decir, si $Yf = (df)X$. Notamos $X \sim_f Y$.

a) Probar que si $X \sim_f Y$ y $Y \sim_g Z$, entonces $X \sim_{gf} Z$.

b) Probar que si $X_1 \sim_f Y_1$ y $X_2 \sim_f Y_2$ entonces $[X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2]$.

14. Calcular las curvas integrales y el grupo uniparamétrico definidos por el campo X en cada uno de los siguientes casos

a) $M = \mathbb{R}^2$ y $X(a, b) = b \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y}$;

b) $M = \mathbb{R}^2$ y $X(a, b) = a \frac{\partial}{\partial x} - b \frac{\partial}{\partial y}$;

c) $M = GL_n(\mathbb{R})$ y $X(A) = AB \in T_A GL_n(\mathbb{R}) \sim M_n(\mathbb{R})$ con B en $M_n(\mathbb{R})$;

d) $M = \mathbb{T}^2$ y $X(a, b) = 1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x_2}$ donde $\frac{\partial}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial}{\partial x_2}$ vienen de la estructura de producto de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

15. Dados dos campos X, Y probar que $[X, Y] = 0$ si y solo si $\phi_X^t \phi_Y^s \phi_X^{-t} \phi_Y^{-s}(p) = p$ para todo p en M y $s, t > 0$ suficientemente pequeños.

16. Sea γ una curva integral de un campo X definido sobre M . Probar que si $\dot{\gamma}(t) = 0$ para algún t , entonces γ es constante.

17. Sea M una variedad, $\epsilon > 0$ fijo y $X \in \Gamma(TM)$ un campo tal que para todo $p \in M$ la curva integral de X que pasa por p está definida en $(-\epsilon, \epsilon)$. Probar que X es completo.

18. Probar que si M es compacta y $X \in \Gamma(TM)$, entonces X es completo.

19. Sea $f : M \rightarrow N$ diferenciable e inyectiva, probar que $\dim M \leq \dim N$.

20. Sea $f : M \rightarrow U \subset \mathbb{R}$ diferenciable, propia, sobreyectiva y tal que todo $t \in U$ es valor regular.

- a) Probar que existe $X \in \Gamma(TM)$ tal que $X \sim_f \frac{\partial}{\partial t}$. ¿Es X único?
- b) Sea X como en a). Probar que X es completo.
- c) Probar que $f^{-1}(u)$ es difeomorfo a $f^{-1}(u')$ para todo par $u, u' \in U$.

Nota: De la misma forma se puede probar el teorema de Ehresmann que dice que si $f : M \rightarrow N$ es una submersion propia y sobreyectiva entonces f es una fibration localmente trivial.

21. Demostrar que si doblamos una hoja de papel entonces por todo punto pasa un segmento de recta contenido en la hoja.

Sugerencia: Si M es la hoja de papel entonces como M debe tener curvatura de Gauss nula, para cada punto p en M hay un vector v_p en $T_p M$ que esta en el nucleo del mapa de Gauss. Considere el campo $X(p) = v_p$.

22. Sea G un grupo de Lie y tomemos $v \in T_e G$, sea X_v el unico campo invariante a izquierda con $X_v(e) = v$ y denotemos por ϕ_v^t el grupo uniparametrico definido por X_v .

- a) Si $\exp : T_e G \rightarrow G$ viene dada por $\exp(v) = \phi_v^1(e)$, probar que \exp define una funcion diferenciable.
- b) Probar que si $[X_v, X_w] = 0$ entonces ϕ_v y ϕ_w conmutan y

$$\exp(v + w) = \exp(v) \exp(w).$$

- c) Si $\varphi : G \rightarrow H$ es un morfismo de grupos de Lie entonces demostrar que

$$\varphi \circ \exp = \exp \circ d_e \varphi.$$

23. Probar que un campo X en M define una derivación en $\mathcal{D}(M)$ via $f \mapsto X(f)$, donde $(X(f))(p) := X(p)(f_p)$ con f_p el germen de f en p . Probar que de este modo se tiene una biyección entre $\Gamma(TM)$ y las derivaciones de $\mathcal{D}(M)$.

24. Sean X, Y campos en M , vistos como derivaciones $X, Y : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$. Mostrar con un ejemplo que $X \circ Y$ no es necesariamente una derivación. Probar que $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$ siempre lo es.