Formas Cuadráticas - Práctica 4

Algebras de Clifford, grupo y género Spin
2do. Cuatrimestre 2008

Durante esta práctica vamos a fijar un espacio cuadrático regultar (V, q).

1. Sea (V, q) un espacio ternario regular (i.e. de dimensión 3) sobre un cuerpo k con determinante $d \cdot (k^\times)^2$.

   - Probar que el centro del álgebra de Clifford $\mathcal{C}(V)$ tiene dimensión 2 sobre k y tiene una base de la forma $\{1, \mathbf{v}\}$ con $\mathbf{v}^2 \in -d(k^\times)^2$.
   - Supongamos que (V, q) es isotrópico. Probar que existe un isomorfismo
   $$\psi : \mathcal{C}_0(V) \mapsto M_2(k),$$
   donde $M_2(k)$ denota las matrices de 2×2 con coeficientes en k. Probar además que ψ se puede elegir tal que $\psi(\mathbf{u})^t = \psi(\bar{\mathbf{u}})$, donde el superíndice t denota trasposición matricial.

2. Sea Λ_p un retículo de $\mathbb{Z}_p$ de rango 3, con $p \neq 2$. Supongamos que q toma valores enteros en Λ_p (o sea $q(\Lambda_p) \subset \mathbb{Z}_p$) y que el determinante de q restringida a Λ_p tiene valuación p-ádica 1. Probar que $\theta : O^+(\Lambda_p) \mapsto \mathbb{Q}_p^\times/(\mathbb{Q}_p^\times)^2$ es suryectiva.

3. Usando la teoría de género spinorial, probar que las formas
   $$x^2 - 3y^2 - 2yz - 23z^2$$
   $$x^2 - 7y^2 - 6yz - 11z^2$$
   son propiamente equivalentes sobre $\mathbb{Z}$ (comparar con el ejercicio 8. de la práctica 3).

4. Probar que la forma
   $$x^2 + 5y^2 - 25z^2$$
   esta en un género con una única clase. Deducir que es enteramente equivalente a
   $$-x^2 + 5y^2 + 25z^2.$$
   Hallar la equivalencia.

5. Consideremos las siguientes formas cuadráticas ternarias:
   $$\begin{aligned} f_1 &= x^2 + xy + y^2 + 9z^2 \\ f_2 &= x^2 + 3y^2 + 3yz + 3z^2. \end{aligned}$$
   Probar que están en el mismo género y son representantes de las dos $\mathbb{Z}$-clases en dicho género (cuidado que estas formas son definidas positivas).

Probar además que están en diferente género Spin. Verificar que f_2 representa 4 de manera primitiva pero f_1 no lo hace (se puede probar el siguiente Teorema: si f es una forma entera en $\mathbb{Z}$ en al menos 4 variables y $a \in \mathbb{Z}$ es no nulo y representado de forma primitiva por f en $\mathbb{Z}_p$ para todo primo p, entonces a se representa por una forma en el mismo género Spin que f).