Formas Cuadráticas - Práctica 3

Retículos y formas cuadráticas sobre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_p$.
2do. Cuatrimestre 2008

Para simplificar las cuentas, llamaremos retículos a retículos sobre $\mathbb{Z}$ o sobre $\mathbb{Z}_p$, aunque los resultados valen sobre cualquier DIP.

1. Sean $L_1 \subset L_2$ retículos de $\mathbb{Z}^n$ o de $\mathbb{Z}_p^n$. Probar que si $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es base de L_2, existe una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de L_1 tal que

$$\begin{cases} v_1 \in \langle w_1 \rangle \\ v_2 \in \langle w_1, w_2 \rangle \\ \vdots \\ v_n \in \langle w_1, \ldots, w_n \rangle. \end{cases}$$

2. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de un retículo L y $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es un conjunto linealmente independiente de elementos de L, entonces son equivalentes:

   - $\{w_1, \ldots, w_r\}$ se extiende a una base de L, o sea existen $\{w_{r+1}, \ldots, w_n\}$ tales que $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es base de L.
   - Si escribimos a cada w_i como

   $$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j,$$

   y consideramos la matriz de $n \times r$ formada por los $a_i j$, entonces el $\mathbb{Z}$-módulo generado por los determinantes de todas las submatrices de $r \times r$ es $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}_p$).
   - $\langle w_1, \ldots, w_r \rangle \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cap L = \langle w_1, \ldots, w_r \rangle$. O sea si $v = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i$ con $a_i \in \mathbb{Q}$ es un elemento de L, entonces los a_i son enteros (resp. $\mathbb{Q}_p$ y $\mathbb{Z}_p$).

3. Probar las equivalencias de las siguientes formas cuadráticas sobre $\mathbb{Z}_2$:

   - $x_1^2 + x_2^2 \sim 5x_2^2 + 5x_2^2$.
   - $x_1^2 + 2x_2^2 \sim 3x_1^2 + 6x_2^2$.
   - $x_1^2 + 4x_2^2 \sim 5x_1^2 + 20x_2^2$.
   - $ux_1^2 + 2x_2x_3 \sim ux_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ (con $|u| - 1$).
   - $ux_1^2 + (2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_2^2) \sim u(3x_1^2 - x_2^2 - x_2^3)$ (con $|u| = 1$).
   - $(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) + (2x_3^2 + 2x_3x_4 + 2x_4^2) \sim 2x_1x_2 + 2x_3x_4$.

   En particular, la cuarta relación dice que no hay un Teorema de cancelación de Witt general en $\mathbb{Z}_2$. Ergo tampoco lo hay en $\mathbb{Z}$.

4. Hallar una diagonalización para la forma $f(\mathbf{x}) = 5x^2 + 2xy + 5y^2$ en $\mathbb{Z}_p$ para $p = 2, 3$ y 5.

5. Determinar los primos p tales que las siguientes formas son equivalentes en $\mathbb{Z}_p$:

   - $2xy$ con $x^2 - y^2$.
   - $5x^2 + 13y^2 + 11z^2 + 2yz + 2xz + 16xy$ con $x^2 + 16y^2 + 10z^2 + 14yz - 4xz + 2xy$.
   - $x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 6yz$ con $2x^2 + 3y^2 + 5z^2$.

6. Daremos aquí un algoritmo para decidir si dos formas cuadráticas f_1, f_2 con valores enteros definidas son equivalentes o no. Sin pérdida de generalidad, supongamos que las formas son definidas positivas.

   - Probar que dado $a \in \mathbb{N}$ existen finitos vectores $v \in \mathbb{Z}^n$ tales que $f_i(v) = a$.
   - Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{Z}^n$ de vectores de norma chica para f_1. Sean $a_i = f_1(v_i) \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$. Sea $W_i = \{w \in \mathbb{Z}^n : f_2(w) = a_i\}$. Como W_i es finito para todo $1 \leq i \leq n$, si $f_1 \sim f_2$, existe una transformación lineal que manda v_i en un elemento de W_i. Como el número de tales transformaciones lineales es finito, chequeando si cada una de ellas manda f_1 en f_2 podemos decidir si son equivalentes o no.

7. Probar que las siguientes formas cuadráticas con valores enteros estan en el mismo género, pero no son $\mathbb{Z}$-equivalentes:

   - $x^2 + xy + 6y^2$.
   - $2x^2 + xy + 3y^2$.
   - $2x^2 - xy + 3y^2$.

8. (a) Probar que las formas cuadráticas
      - $g(x, y) = 3x^2 + 2xy + 23y^2$,
      - $h(x, y) = 7x^2 + 6xy + 11y^2$

      estan en el mismo género pero no son equivalentes.

   (b) Probar que las formas ternarias indefinidas $z^2 - g(x, y)$ y $z^2 - h(x, y)$ son equivalentes propiamente. Sugerencia: hallar vectores de norma 1 para cada una y hacer un cambio de variables.

9. Determinar cuales de las siguientes formas enteras son propiamente equivalentes:

   - $x^2 + y^2 - 10z^2$.
   - $x^2 - y^2 + 10z^2$.
   - $x^2 + 2y^2 - 5z^2$.

- $x^2 - 2y^2 + 5z^2$.
- $-x^2 + 2y^2 + 5z^2$.