Formas Cuadráticas - Práctica 2

2do. Cuatrimestre 2008

Cuerpos cuadráticos imaginarios y formas binarias

1. Determinar para que primos p las siguientes formas cuadráticas son isotrópicas sobre $\mathbb{Q}_p$:
   (a) $5x^2 - y^2 - 3z^2$,
   (b) $x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 + 5x_4^2$.
2. Determinar el conjunto de primos racionales p tales que las siguientes formas son equivalentes sobre $\mathbb{Q}_p$:
   (a) $3x^2 + 7y^2$ y $x^2 + 84y^2$.
   (b) $x^2 - 3y^2 + 15z^2$ y $3x^2 - 5y^2 + 3z^2$.
   (c) $x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_3^2 - 7x_4^2$ y $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.
3. Determinar cuales de las siguientes formas son isotrópicas sobre $\mathbb{Q}$:
   (a) $x_1^2 + x_2^2 - 15x_3^2 - 15x_4^2$.
   (b) $3x^2 + 2y^2 - 7z^2$.
   (c) $3x^2 + 2y^2 - 11z^2$.
4. Determinar si las siguientes formas son equivalentes sobre $\mathbb{Q}$. En caso de serlo, dar un isomorfismo explícito:
   (a) $x^2 - 15y^2$ y $3x^2 - 5y^2$.
   (b) $x^2 - 82y^2$ y $2x^2 - 41y^2$.
   (c) $x^2 + y^2 + 16z^2$ y $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2yz - 2xz$.
5. Dar una condición necesaria y suficiente para un número natural n ser la suma del cuadrado de dos números racionales.
6. Dar una condición necesaria y suficiente para un número natural n ser la suma del cuadrado de tres números racionales.
7. Probar que todo número natural es la suma del cuadrado de cuatro números racionales.
8. **Lema de Davenport-Cassels**: Si f es una forma cuadrática definida positiva entera (i.e. con coeficientes enteros) que satisface la siguiente propiedad:

   $$\text{Para todo } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n \text{ existe } y \in \mathbb{Z}^n \text{ tal que } f(x - y) < 1,$$

   entonces si $b \in \mathbb{Z}$, f representa a b en $\mathbb{Q}$ si y sólo si lo representa en $\mathbb{Z}$.

Sugerencia: suponer que f representa a t^2b en $\mathbf{x}$, con $t \in \mathbb{N}$, $t \neq 1$ y t mínimo con esta propiedad. Aplicar la hipótesis a $\frac{\mathbf{x}}{t}$ y considerar el elemento $\mathbf{x}' = (f(\mathbf{y}) - b)\mathbf{x} + 2(bt - f(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\mathbf{y}$, donde $\mathbf{y}$ es el de la hipótesis. Verificar que si $\frac{\mathbf{x}}{t} - \mathbf{y}$ es no nulo, entonces $f(\mathbf{x}') = \tilde{t}^2 b$ con $\tilde{t} < t$. Deducir que entonces $\frac{\mathbf{x}}{t} \in \mathbb{Z}^n$.

9. Concluir el resultado de la representación de un número entero como suma de enteros al cuadrado.

10. Probar el siguiente resultado de **Gauss**: todo número natural es la suma de tres números triangulares, donde un número es triangular si es de la forma $\frac{m(m+1)}{2}$.