

Práctica 1 (Para alumnos que no cursaron ECPyA I)

Para hacer con MAPLE, Singular, etc.

1)

- (i) Usando órdenes lexicográficos puros, determinar exactamente los puntos complejos de las variedades $V(X^2+Y^2+Z^2-1, X^2+Y^2+Z^2-2X, 2X-3Y-Z)$ y $V(X^2Y-Z^3, 2XY-4Z-1, Z-Y^2, X^3-4YZ)$.
- (ii) Encontrar todas las soluciones racionales del sistema $x^2+y^2+z^2-4 = x^2+2y^2-5 = xz-1 = 0$. Tiene el sistema un número finito de soluciones complejas?

2) Calcular usando el orden lexicográfico puro y el orden "grevlex" con $X > Y > Z$ bases de Gröbner de los ideales $\langle X^5 + Y^4 + Z^3 - 1, X^3 + Y^2 + Z^2 - 1 \rangle$, $\langle X^5 + Y^4 + Z^3 - 1, X^3 + Y^3 + Z^2 - 1 \rangle$, y comparar los tamaños.

¿ Qué se observa ?

3) Sean a, b, c tales que $a + b + c = 3, a^2 + b^2 + c^2 = 5$ y $a^3 + b^3 + c^3 = 7$.

- (i) Probar que $a^4 + b^4 + c^4 = 9$.
- (ii) Probar que $a^5 + b^5 + c^5 \neq 11$.
- (iii) Cuál es el valor de $a^5 + b^5 + c^5$? Explicar por qué se puede predecir de antemano que este valor será constante para tales a, b, c .

4) Encontrar la ecuación implícita de la superficie parametrizada por

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \quad z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}.$$

5) Sea C la flor en el plano descrita por la ecuación $r = |\sin(2\theta)|$ en coordenadas polares. Dibujarla. Es cierto que el polinomio $p = x^7 - x^6y + 3x^5y^2 - 3x^4y^3 + y^6x - y^7 - 4x^3y^2 + 4x^2y^3 + 3x^3y^4 - 3x^2y^5$ se anula en todos los puntos de C ?

6) Sean $f_1 = x^3 - 2y^2, f_2 = 3x^6 + y^4$ y denotemos $J = \langle f_1, f_2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y]$. Es cierto que el polinomio $x + y^2$ se anula en $V(J)$?