PRÁCTICA II

VARIEDADES TORICAS - 1ER. CUATRIMESTRE 2005

Notación: Dado un cono convexo σ en $\mathbb{R}^n$, notaremos con σ^ν su cono dual y con $W_\sigma := \sigma \cap -\sigma$ el mayor subespacio lineal contenido en σ.

Ejercicio 1. Dado un cono racional poliedral σ en $\mathbb{R}^n$, probar que existe un cono racional poliedral σ_0 estrictamente convexo tal que

(i) $\sigma = W_\sigma + \sigma_0$,
(ii) $\dim(\sigma) = \dim(W_\sigma) + \dim(\sigma_0)$.

Asimismo, probar que W_σ admite una base de elementos con coordenadas enteras, o equivalentemente, puede definirse implícitamente mediante ecuaciones lineales con coeficientes enteros.

Ejercicio 2. Sea σ un cono racional poliedral en $\mathbb{R}^n$. Probar que σ es estrictamente convexo si y sólo σ^ν tiene dimensión n. Más generalmente, probar que $\dim(\sigma^\nu) = n - \dim(W_\sigma)$.

Ejercicio 3. Probar que toda cara de una cara de un cono racional poliedral σ, es una cara de σ.

Ejercicio 4. Sea τ una cara de un cono racional poliedral σ en $\mathbb{R}^n$. Probar que para todo vector u en el interior relativo de la cara $\tau^* = \tau^\perp \cap \sigma^\nu$ del cono dual (es decir en el interior de la cara como subconjunto del menor subespacio lineal que la contiene $\tau^* - \tau^*$), vale que $\tau = \sigma \cap u^\perp$. En particular, si σ es estrictamente convexo, $\{0\}$ es una cara de σ y se verifica que $\{0\} = \sigma \cap u^\perp$, para todo u en el interior de σ^ν.

Ejercicio 5. Sea σ un cono racional poliedral en $\mathbb{R}^n$.

(i) Probar que un cono racional poliedral τ contenido en σ es una cara de σ si y sólo si verifica la siguiente propiedad: Para todo par de elementos x, y de σ, $x + y \in \tau \leftrightarrow x \in \tau$, $y \in \tau$.
(ii) Sea $\varphi : S_{\sigma^\nu} \to \mathbf{k}$ un morfismo de semigrupos y sea $A := \varphi^{-1}(\mathbf{k}^*)$. Probar que existe una cara μ de σ^ν tal que $A = \mu \cap \mathbb{Z}^n$.

Ejercicio 6. Sea σ un cono racional poliedral en $\mathbb{R}^n$. Si el cono dual puede ser generado por n vectores que forman una $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}^n$, probar que σ tiene la misma propiedad. O sea, σ es regular si y sólo si σ^ν es regular.

Ejercicio 7. Sea σ un cono racional poliedral en $\mathbb{R}^n$ estrictamente convexo, de dimensión $d \leq n$ y sea V_{σ^ν} la variedad tórica afín asociada al cono dual. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) V_{σ^ν} es no singular
(ii) V_{σ^ν} es isomorfa al producto $(\mathbf{k}^*)^{n-d} \times \mathbf{k}^d$.