

Curvas, Superficies e Integrales

Gabriel Acosta y Noemí Wolanski

Índice general

Preliminares	5
Capítulo 1. Curvas	7
1. Parametrizaciones y suavidad	7
Ejercicios	12
2. Longitud de una curva	15
Ejercicios	21
3. Integral de longitud de arco	22
Ejercicios	24
4. Integrales curvilíneas	25
Ejercicios	28
Capítulo 2. Superficies	31
1. Parametrizaciones y suavidad	31
Ejercicios	36
2. Área de una superficie	37
3. Integral de superficie	38
4. Orientación de superficies y flujo a través de una superficie	41
Ejercicios	44
Bibliografía	47

Preliminares

En estas notas se presentan los temas de curvas, superficies e integrales sobre curvas y superficies como se darían en un primer curso para alumnos de Análisis II / Matemática 3 en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA.

Se trata de presentar los temas sin un exagerado formalismo pero sin perder las ideas geométricas subyacentes.

Por lo tanto, se trata de evitar identificar una curva o una superficie con una parametrización de la misma. Del mismo modo, se busca que las definiciones de recta (resp. plano) tangente sean intrínsecas a la curva (resp. superficie).

En el caso de curvas, siguiendo el libro de Apostol [1] se define rectificabilidad y longitud de una curva en forma intrínsecas y se prueba la fórmula que permite calcular la longitud a partir de una parametrización.

Con la misma lógica, se define la integral con respecto a longitud de arco de una función continua, y correspondientemente, la integral curvilínea de un campo en forma intrínseca a partir de motivaciones físicas sobre el interés de estos cálculos. Las fórmulas para el cálculo utilizando parametrizaciones es una consecuencia inmediata de las definiciones y de las fórmulas para la longitud.

En el caso de superficies, se define el plano tangente en forma intrínseca y luego se obtiene su ecuación a partir de una parametrización. El cálculo del área se sugiere hacerlo utilizando una parametrización siguiendo, por ejemplo, el libro de Marsden y Tromba [3].

Como en el caso de curvas, una vez que se tiene una forma de calcular el área, las definiciones de integral de superficie de una función continua y de flujo de un campo a través de una superficie se realizan a partir de aplicaciones físicas y puede hacerse de manera ‘bastante’ intrínseca.

Agregamos en cada capítulo los ejercicios que se sugieren a los alumnos sobre estos temas.

El curso concluye con los Teoremas del Cálculo Integral (Green, Stokes y Gauss) y aplicaciones al modelado de fenómenos de la física (Ley de conservación de masa, Ecuación del Calor, Ecuaciones de Maxwell). No incluimos estos temas que están muy bien expuestos en [3].

CAPÍTULO 1

Curvas

1. Parametrizaciones y suavidad

DEFINICIÓN 1.1. Una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto de puntos en el espacio que puede describirse mediante un parámetro que varía en forma continua en un intervalo de la recta.

Más precisamente, \mathcal{C} es una curva si existen funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ definidas en algún intervalo $[a, b]$ tales que $(x, y, z) \in \mathcal{C}$ si y sólo si existe $t \in [a, b]$ tal que

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

Llamemos $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ a la función $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces, \mathcal{C} es la imagen por σ del intervalo $[a, b]$. σ se llama una “parametrización de \mathcal{C} ”.

El ejemplo más elemental de curva en el plano es el gráfico de una función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. El gráfico es una curva que admite la parametrización, con $t \in [a, b]$,

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

Pero, aún en el plano hay curvas que no son el gráfico de ninguna función. Por ejemplo, una circunferencia. Para un ejemplo en el espacio ver la figura 1.

Uno de los conceptos importantes al tratar con curvas es el de recta tangente a la curva en un punto $P_0 \in \mathcal{C}$. Se trata de la recta por P_0 que mejor aproxima a \mathcal{C} en un entorno de P_0 . Este concepto ya se vió en el caso en que $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ es el gráfico de una función. Recordemos su definición que es válida para cualquier curva.

DEFINICIÓN 1.2. Sea \mathcal{C} una curva, $P_0 \in \mathcal{C}$. Una recta L por P_0 se llama tangente a \mathcal{C} en P_0 si es el límite de las rectas secantes a \mathcal{C} por P_0 . Estas son las rectas que pasan por P y P_0 con $P \in \mathcal{C}$.

El límite se entiende en el sentido de que el ángulo (entre 0 y $\pi/2$) entre L y la secante por P_0 y P tiende a 0 cuando P se acerca a P_0 con $P \in \mathcal{C}$.

En el caso de un gráfico de una función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, en lugar de mirar al ángulo entre la secante y el candidato a recta tangente L , tomamos una recta horizontal por el punto P_0 y vemos si los ángulos entre la secante y la recta horizontal tienden al determinado por la recta L y la horizontal cuando me acerco al punto P_0 . Esto es equivalente a que el ángulo entre la secante y L tienda a cero.

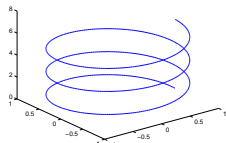


FIGURA 1. Una curva \mathcal{C} que admite una parametrización de la forma $\sigma(t) = (\cos(3t), \sin(3t), t)$, con $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

La forma de garantizar que el ángulo de la secante con la horizontal tienda al ángulo de L con la horizontal es que la tangente (seno/coseno) del ángulo entre la secante y la horizontal converja a la tangente del ángulo correspondiente entre L y la horizontal. A estos números se los conoce como pendiente de las rectas.

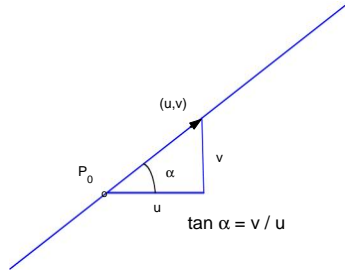
Sea $t_0 \in [a, b]$ tal que $P_0 = (t_0, f(t_0))$. Análogamente, $P = (t, f(t))$ para un $t \in [a, b]$. Claramente, $P \rightarrow P_0$ implica que $t \rightarrow t_0$.

La pendiente de la recta secante por P y P_0 es

$$m_P = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Esta cantidad tiene límite cuando $t \rightarrow t_0$ si f es derivable en t_0 (es la definición de derivada). En ese caso, el límite es $f'(t_0)$. (Y podemos admitir que el límite sea infinito. En ese caso, el ángulo límite es $\pi/2$ y la recta límite resulta ser la vertical).

¿Cuál es la dirección de una recta con pendiente $f'(t_0)$? Será la determinada por cualquier vector (u, v) tal que $v/u = f'(t_0)$. Por ejemplo, el vector $(1, f'(t_0))$. Observemos que ese es el vector $\sigma'(t_0)$ para la parametrización $\sigma(t) = (t, f(t))$ que estamos considerando.



Cuando estamos en \mathbb{R}^3 no es posible tomar una recta de referencia y por eso debemos mirar al ángulo comprendido.

DEFINICIÓN 1.3. Una curva \mathcal{C} se dice “simple, abierta” si no se corta a si misma. Más precisamente, si admite una parametrización inyectiva.

Para curvas abiertas, simples tenemos el siguiente resultado

PROPOSICIÓN 1.1. Si \mathcal{C} es una curva que admite una parametrización $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\sigma \in C([a, b])$, inyectiva, diferenciable en $t_0 \in [a, b]$ y tal que $\sigma'(t_0) := (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq (0, 0, 0)$, se sigue que \mathcal{C} tiene recta tangente en el punto $P_0 = \sigma(t_0)$ y esta recta tiene la dirección del vector $\sigma'(t_0)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $P_n \rightarrow P_0$ con $P_n \in \mathcal{C}$ para todo n . Llamemos S_{P_n, P_0} a la recta secante por P_n y P_0 . Tenemos que para cada n existe un único $t_n \in [a, b]$ tal que $P_n = \sigma(t_n)$. Análogamente, $t_0 \in [a, b]$ es el único punto $t \in [a, b]$ tal que $P_0 = \sigma(t)$.

Afirmo que $t_n \rightarrow t_0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Esto lo demostraremos en el lema siguiente.

Veamos que S_{P_n, P_0} tiende a L_{P_0} , la recta por P_0 con dirección $\sigma'(t_0)$. En efecto, S_{P_n, P_0} tiene la dirección del vector

$$\sigma(t_n) - \sigma(t_0).$$

También genera la misma recta el vector

$$\tau_n := \frac{1}{t_n - t_0} (\sigma(t_n) - \sigma(t_0))$$

que converge al vector $\sigma'(t_0)$.

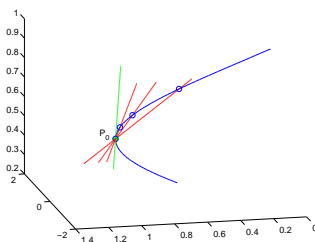


FIGURA 2. Recta tangente por P_0 y algunas secantes por P_0 y distintos P . Los diferentes P han sido tomados de un solo "lado" de P_0 solo por claridad gráfica.

Como $\sigma'(t_0) \neq 0$, se tiene que $\frac{\tau_n}{\|\tau_n\|} \rightarrow \frac{\sigma'(t_0)}{\|\sigma'(t_0)\|}$ con lo cual

$$\alpha(P_n) := \text{el ángulo entre las rectas } S_{P_n, P_0} \text{ y } L_{P_0} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

LEMA 1.1. *Sea \mathcal{C} una curva abierta, simple. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización inyectiva de \mathcal{C} . Entonces, $P_n = \sigma(t_n) \rightarrow P_0 = \sigma(t_0)$ si y sólo si $t_n \rightarrow t_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Una implicación es inmediata del hecho de que σ es una función continua.

Veamos la implicación no trivial. Supongamos que $P_n \rightarrow P_0$ pero que $t_n \not\rightarrow t_0$. En este caso, existe $\varepsilon_0 > 0$ y una subsucesión t_{n_k} tales que

$$(1.1) \quad |t_{n_k} - t_0| > \varepsilon_0.$$

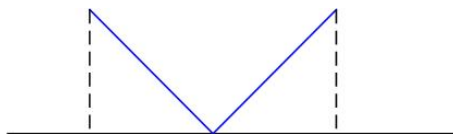
Veamos que llegamos a un absurdo. En efecto, como la sucesión $\{t_{n_k}\}$ está acotada tiene algún punto de acumulación. Es decir, existe $t^* \in [a, b]$ y una subsucesión $t_{n_{k_j}}$ tales que

$$t_{n_{k_j}} \rightarrow t^* \quad (j \rightarrow \infty).$$

Como σ es continua se tiene que $P_{n_{k_j}} = \sigma(t_{n_{k_j}}) \rightarrow \sigma(t^*)$ cuando $j \rightarrow \infty$. Pero entonces $\sigma(t^*) = P_0$. Como t_0 era el único punto del intervalo $[a, b]$ cuya imagen por σ es P_0 se sigue que $t^* = t_0$. Pero esto contradice (1.1). □

OBSERVACIÓN 1.1. Observemos que si $\sigma'(t_0)$ es el vector nulo, no podemos afirmar nada. Podría haber recta tangente o podría no haberla.

Por ejemplo, consideremos la curva parametrizada por $\sigma(t) = (\text{signo}(t)t^2, t^2)$ con $t \in [-1, 1]$. Tenemos que $y(t) = x(t)$ si $t \in [0, 1]$ y $y(t) = -x(t)$ si $t \in [-1, 0]$. (La función signo está definida fuera del origen de la siguiente manera: $\text{signo}(t) = -1$ si $t < 0$, $\text{signo}(t) = 1$ si $t > 0$). El gráfico de la curva es



Esta curva no tiene recta tangente en el origen.

Por otro lado, si $\sigma(t) = (\text{signo}(t)t^2, t^4)$ con $t \in [-1, 1]$, tenemos $y(t) = x^2(t)$ si $t \in [-1, 1]$. Por lo tanto, en este caso σ es la parametrización de una parábola que tiene por recta tangente en el origen a la horizontal.

Observar que en ambos casos σ es continuamente diferenciable en $[-1, 1]$ con $\sigma'(0) = (0, 0)$.

DEFINICIÓN 1.4. Una curva se dice “suave” si tiene recta tangente en todos sus puntos y ésta varía con continuidad en el sentido de que L_P tiende a L_{P_0} cuando $P \rightarrow P_0$.

Más precisante, llamamos L_P a la tangente en el punto $P \in \mathcal{C}$. Escribamos $L_P = P + L'_P$ donde L'_P es una recta por el origen. Decimos que L_P tiende a L_{P_0} cuando $P \rightarrow P_0$ si $L'_P \rightarrow L'_{P_0}$.

PROPOSICIÓN 1.2. Si \mathcal{C} es una curva abierta, simple que admite una parametrización $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva, de clase $C^1([a, b])$ con $\sigma'(t) \neq (0, 0, 0)$ para todo $t \in [a, b]$ se sigue que \mathcal{C} es suave.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 1.1 sabemos que \mathcal{C} tiene recta tangente en todos sus puntos y que si $P = \sigma(t)$ la recta L_P tangente a \mathcal{C} en P tiene la dirección del vector unitario $\tau(P) := \sigma'(t)/\|\sigma'(t)\|$. Es decir, $L_P = P + \lambda\tau(P)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sea $P_n \rightarrow P_0$ y sea $t_n \in [a, b]$ tal que $P_n = \sigma(t_n)$. Como se vió en el Lema 1.1 se tiene que $t_n \rightarrow t_0$. Por lo tanto, $\tau(P_n) \rightarrow \tau(P_0)$ cuando $n \rightarrow \infty$ y se tiene $L_{P_n} \rightarrow L_{P_0}$. \square

DEFINICIÓN 1.5. Una parametrización $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de una curva abierta, simple, suave \mathcal{C} se dice “regular” si σ es una biyección entre $[a, b]$ y \mathcal{C} , $\sigma \in C^1([a, b])$ y $\sigma'(t) \neq (0, 0, 0)$ para todo $t \in [a, b]$.

DEFINICIÓN 1.6. \mathcal{C} es una curva cerrada, simple si existe una parametrización $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que es inyectiva en $[a, b)$, continua en $[a, b]$, $\sigma(a) = \sigma(b)$ y la imagen de σ es \mathcal{C} .

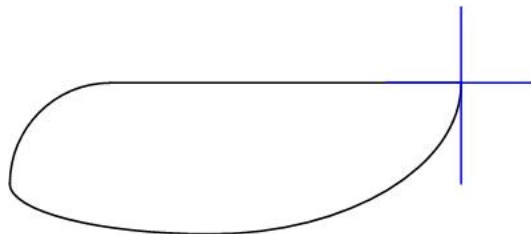
PROPOSICIÓN 1.3. Si \mathcal{C} es una curva cerrada, simple que admite una parametrización $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que es inyectiva en $[a, b)$ con imagen \mathcal{C} , C^1 en $[a, b]$, con $\sigma(a) = \sigma(b)$ y $\sigma'(a) = \sigma'(b)$ (derivadas laterales) y $\sigma'(t_0) \neq (0, 0, 0)$ para todo $t_0 \in [a, b]$ se sigue que \mathcal{C} es una curva suave.

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue las líneas de las demostraciones de las Proposiciones 1.1 y 1.2. La única diferencia es que en este caso, si $t_0 = a$ puede ser $t^* = b$ y viceversa. En el caso $t_0 = a$, por ejemplo, se tendría

$$\tau_n \rightarrow \sigma'(b) = \sigma'(a)$$

y se sigue que la recta por $P_0 = \sigma(t_0)$ generada por la dirección del vector unitario $\sigma'(t_0)/\|\sigma'(t_0)\|$ es la recta tangente a \mathcal{C} por P_0 . Como σ' es continua y $\sigma'(a) = \sigma'(b)$, se sigue que la tangente varía con continuidad. Por lo tanto \mathcal{C} es una curva suave. \square

OBSERVACIÓN 1.2. Observar que la hipótesis $\sigma'(a) = \sigma'(b)$ es necesaria para la existencia de recta tangente a \mathcal{C} en $P_0 = \sigma(a) = \sigma(b)$. En efecto, la dirección de la recta secante por puntos cercanos a P_0 tiende al vector $\sigma'(b)$ cuando nos acercamos por un lado y al vector $\sigma'(a)$ cuando nos acercamos por el otro. La única forma de que la secante converja a una recta es que $\sigma'(b) = \sigma'(a)$.



DEFINICIÓN 1.7. Si \mathcal{C} es una curva cerrada, simple, suave, una parametrización $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice “regular” si σ es inyectiva en $[a, b)$, la imagen de σ es \mathcal{C} , $\sigma \in C^1([a, b])$, $\sigma(a) = \sigma(b)$, $\sigma'(a) = \sigma'(b)$ y $\sigma'(t) \neq (0, 0, 0)$ para todo $t \in [a, b]$.

DEFINICIÓN 1.8. Decimos que \mathcal{C} es una curva simple si es una curva abierta simple o una curva cerrada simple.

Un caso particular muy importante de curva es la que describe la trayectoria de una partícula. Si llamamos $\sigma(t)$ a la posición de la partícula en el instante $t \in [t_0, t_1]$, σ resulta la parametrización de una curva (suponemos que la partícula no salta). En este caso, el vector $\sigma'(t)$ da la dirección y sentido de recorrido de la partícula al pasar por el punto $\sigma(t)$ en el instante t , y su magnitud da la rapidez con la que se mueve la partícula. (Más sobre esto en la siguiente sección).

Al vector $\sigma'(t)$ se lo denomina “vector velocidad” aunque la parametrización σ no corresponda a la trayectoria de una partícula. Con esta misma analogía, al vector $\sigma''(t)$ se lo denomina “vector aceleración”.

Ejercicios

EJERCICIO 1.1.

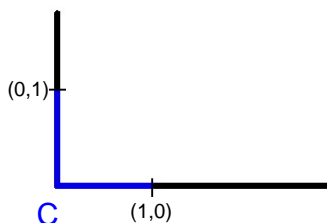
1. Probar que

$$\begin{cases} x_1(t) = r \cos 2\pi t \\ y_1(t) = r \operatorname{sen} 2\pi t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \begin{cases} x_2(t) = r \cos 4\pi t \\ y_2(t) = r \operatorname{sen} 4\pi t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

son dos parametrizaciones C^1 de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio r .

2. Probar que la circunferencia es una curva cerrada, simple, suave.
3. Probar que $\sigma_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$, $t \in [0, 1]$ no es una parametrización regular.

EJERCICIO 1.2. Considerar la curva \mathcal{C} formada por los segmentos que unen el $(0,1)$ con el $(0,0)$ y el $(0,0)$ con el $(1,0)$.



Probar que

$$\sigma(t) := \begin{cases} (0, (1-t)^2), & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ ((t-1)^2, 0), & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

es una parametrización C^1 de la curva \mathcal{C} .

Observar que \mathcal{C} no tiene recta tangente en el $(0,0)$. ¿Por qué no hay contradicción?

EJERCICIO 1.3. Sea $\sigma(t) = (t^3, t^3)$ con $-1 \leq t \leq 1$. Probar que σ es una parametrización C^1 del segmento $y = x$, $-1 \leq x \leq 1$ que es una curva suave.

Observar que $\sigma'(0) = (0,0)$.

EJERCICIO 1.4. Sea \mathcal{C} el arco de parábola $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 1$.

1. Probar que \mathcal{C} es una curva abierta, simple, suave

2. Probar que $\bar{\sigma}(s) := (\bar{x}(s), \bar{y}(s))$ dada por

$$\begin{cases} \bar{x}(s) = e^s - 1 \\ \bar{y}(s) = (e^s - 1)^2 \end{cases} \quad 0 \leq s \leq \ln 2$$

es una parametrización regular de \mathcal{C} .

3. Observar que $\sigma(t) := (t, t^2)$ con $t \in [0, 1]$ es otra parametrización regular.

4. Hallar una función $g : [0, 1] \rightarrow [0, \ln 2]$ tal que $\bar{\sigma}(g(t)) = \sigma(t)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Observar que g es biyectiva y C^1 .

EJERCICIO 1.5. Sea \mathcal{C} una curva cerrada, simple, suave y $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de \mathcal{C} . Sean $\bar{a} \in (a, b)$ y $\bar{b} = \bar{a} + b - a$. Consideremos la función $\bar{\sigma} : [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\bar{\sigma}(s) = \begin{cases} \sigma(s) & \text{si } s \in [\bar{a}, b], \\ \sigma(a + (s - b)) & \text{si } s \in [b, \bar{b}] \end{cases}$$

Probar que $\bar{\sigma}$ es una parametrización regular de \mathcal{C} (que recorre la curva \mathcal{C} desde y hasta el punto $\sigma(\bar{a})$).

Observar que la parametrización regular $\bar{\sigma}$ se obtiene a partir de de la parametrización regular σ por un cambio de parámetro (una biyección entre los intervalos de los parámetros correspondientes a las dos parametrizaciones) que no es ni siquiera continuo. Esto no es posible en el caso de curvas abiertas, simples, suaves.

EJERCICIO 1.6. Sea \mathcal{C} una curva simple, suave. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de \mathcal{C} . Sea $[a_1, b_1]$ un intervalo arbitrario. Consideremos la función $\sigma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\sigma_1(s) = \sigma\left(a + \frac{b-a}{b_1-a_1}(s-a_1)\right).$$

Probar que σ_1 es una parametrización regular de \mathcal{C} .

Esto muestra que se puede utilizar cualquier intervalo como intervalo de parámetros. Sólo hay que ajustar la velocidad con la que se recorre la curva.

EJERCICIO 1.7. Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las curvas cuyas parametrizaciones se dan a continuación, en el valor especificado de t .

1. $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3)$, $t = 0$
2. $\sigma(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$, $t = 0$
3. $\sigma(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}})$, $t = 1$
4. $\sigma(t) = (0, 0, t)$, $t = 1$

EJERCICIO 1.8. ¿Qué fuerza actúa sobre una partícula de masa m en el instante $t = 0$ si sigue la trayectoria dada por la función σ del Ejercicio 7.(1)?

EJERCICIO 1.9. Suponer que una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que sale por una tangente en $t = 1$. Hallar la ubicación de la partícula en $t = 2$. Suponer que ninguna fuerza actúa sobre ella después del tiempo $t = 1$.

2. Longitud de una curva

Sea \mathcal{C} una curva abierta, simple ¿Cuál es su longitud?

La idea para medir una curva va a ser aproximarla por poligonales con vértices sobre la misma. Pero estos vértices tienen que tener un “orden” sobre la curva porque si no la poligonal no se parecería en nada a la curva.

Para esto empezamos por el concepto de partición de la curva.

Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de \mathcal{C} . Sea $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ una partición de $[a, b]$. Esto induce una partición de la curva \mathcal{C} por los puntos $P_n = \sigma(t_n)$. Puedo pensar a los puntos P_n como vértices de una poligonal. Cuantos más puntos tenga, más parecida será la poligonal a la curva \mathcal{C} . La idea es que si podemos de alguna manera medir la longitud de \mathcal{C} , las longitudes de las poligonales tenderán a la longitud de \mathcal{C} .

Cuando hablamos de una partición \mathcal{P} de \mathcal{C} nos referiremos a un conjunto de puntos $\{P_1, P_2, \dots, P_n\} \subset \mathcal{C}$ ordenados en el sentido de que los parámetros correspondientes están ordenados. Si $P_i = \sigma(t_i)$ se tiene que t_i está entre t_{i-1} y t_{i+1} . (Por lo tanto, la sucesión de los parámetros crece con i o decrece con i dependiendo posiblemente de la parametrización utilizada).

Se puede ver que dadas dos parametrizaciones regulares de una curva simple, suave \mathcal{C} hay una biyección continua entre los intervalos de los parámetros. No lo haremos, pero la demostración de la existencia de la biyección es inmediata y para la continuidad se utiliza el Lemma 1.1.

Esta biyección, por ser continua, es necesariamente creciente o decreciente. Por lo tanto, si los puntos $\{P_1, P_2, \dots, P_n\} \subset \mathcal{C}$ satisfacen que $P_i = \sigma(t_i) = \gamma(s_i)$ y los parámetros t_i están ordenados, también están ordenados los parámetros s_i . De modo que la noción de partición de la curva no depende de la parametrización regular utilizada.

Dada una partición \mathcal{P} de \mathcal{C} , denotaremos $|\Pi(\mathcal{P})|$ a la longitud de la poligonal que tiene como vértices los puntos de \mathcal{P} en el orden correspondiente. Es decir, la poligonal formada por los segmentos que unen los puntos consecutivos P_i y P_{i+1} .

Si \mathcal{P}' es una partición más fina, es decir, si todos los puntos de \mathcal{P} están contenidos en \mathcal{P}' , la longitud $|\Pi(\mathcal{P}')|$ será mayor o igual a $|\Pi(\mathcal{P})|$. En efecto, si entre dos puntos consecutivos P_1 y P_2 de la partición \mathcal{P} tengo puntos S_1, S_2, \dots, S_k de la partición \mathcal{P}' , la longitud del segmento de extremos P_1 y P_2 es menor que

$$\|P_1 - S_1\| + \|S_1 - S_2\| + \dots + \|S_k - P_2\|$$

que es parte de la suma que da la longitud $|\Pi(\mathcal{P}')|$; y por lo tanto la longitud de la poligonal correspondiente a \mathcal{P}' es mayor.

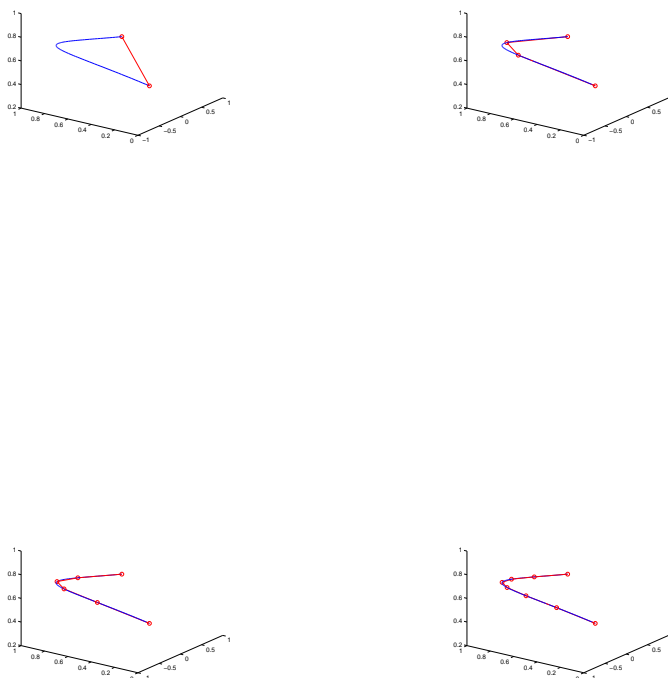


FIGURA 3. Cuatro aproximaciones poligonales con diferentes particiones \mathcal{P} . En cada caso se tiene $|\Pi(\mathcal{P})|$ da respectivamente 2.02, 2.46, 2.50, 2.51. Como es de esperar las longitudes de las poligonales parecen “converger” a medida que aumentamos los segmentos de las poligonales.

DEFINICIÓN 1.9. Si existe una cota superior para las longitudes de todas las poligonales con vértices en una partición de la curva \mathcal{C} decimos que \mathcal{C} es “rectificable” y definimos la longitud de \mathcal{C} como la menor de esas cotas, es decir

$$\text{Long}(\mathcal{C}) := \sup \{ |\Pi(\mathcal{P})|; \mathcal{P} \text{ partición de } \mathcal{C} \}.$$

PROPOSICIÓN 1.4. Si \mathcal{C} admite una parametrización inyectiva $\sigma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^3)$ se sigue que \mathcal{C} es rectificable.

DEMOSTRACIÓN. Sea \mathcal{P} una partición de \mathcal{C} . Como σ es una biyección, existen únicos $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ con $t_i \in [a, b]$ tales que $\mathcal{P} = \{\sigma(t_0), \sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)\}$ (para claridad hemos supuesto ordenados los puntos de manera que los parámetros crezcan con i). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\Pi(\mathcal{P})| &= \sum_{i=1}^n \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma'(t) dt \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Aquí y en lo que sigue para una función vectorial $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$ llamamos $\int \mathbf{F}(t) dt := (\int f_1(t) dt, \int f_2(t) dt, \int f_3(t) dt)$. Y denotamos $\|\mathbf{F}\|$ a la norma euclídea del vector.

Es fácil ver a partir de la definición de la integral como límite de sumas de Riemann que se tiene

$$(1.2) \quad \left\| \int_a^b \mathbf{F}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\mathbf{F}(t)\| dt.$$

En efecto, si $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, se tiene para $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ con $t_{k+1} - t_k = (b-a)/n$,

$$\int_a^b F_i(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) F_i(t_k^*)$$

donde $t_k^* \in [t_k, t_{k+1}]$ es arbitrario y por consiguiente podemos tomar el mismo punto para cada componente F_i , $i = 1, 2, 3$.

Por lo tanto,

$$\int_a^b \mathbf{F}(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \mathbf{F}(t_k^*).$$

Como para suma de vectores se tiene $\|\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{F}_k\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{F}_k\|$ se tiene

$$(1.3) \quad \left\| \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \mathbf{F}(t_k^*) \right\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \|\mathbf{F}(t_k^*)\|.$$

Observemos que el miembro derecho de (1.3) es una suma de Riemann para la función escalar $\|\mathbf{F}\|$. Pasando al límite con $n \rightarrow \infty$ en (1.3) se sigue (1.2). \square

El objetivo es demostrar que en realidad $\int_a^b \|\sigma'(t)\| dt$ no es sólo una cota de la longitud sino que es la longitud de \mathcal{C} . Para ello necesitamos algunas propiedades de la longitud de una curva dada por una parametrización en función de ese parámetro. Más precisamente,

PROPOSICIÓN 1.5. *Dada una función C^1 e inyectiva σ , llamemos $\Lambda(a, b)$ a la longitud de la curva $\sigma([a, b])$. Entonces,*

1. $\Lambda(a, b) > 0$ si $a < b$.
2. Si $a < c < b$ se tiene $\Lambda(a, b) = \Lambda(a, c) + \Lambda(c, b)$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Es claro de la definición.

(2) Veamos primero que $\Lambda(a, b) \geq \Lambda(a, c) + \Lambda(c, b)$. En efecto, sea \mathcal{P}_1 una partición de $\sigma([a, c])$ y \mathcal{P}_2 una partición de $\sigma([c, b])$. Entonces, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ es una partición de $\mathcal{C} = \sigma([a, b])$. Por lo tanto,

$$|\Pi(\mathcal{P}_1)| + |\Pi(\mathcal{P}_2)| = |\Pi(\mathcal{P})| \leq \Lambda(a, b).$$

Fijemos la partición \mathcal{P}_1 y tomemos supremo sobre todas las posibles particiones de $\sigma([c, b])$. Tenemos,

$$|\Pi(\mathcal{P}_1)| + \Lambda(c, b) \leq \Lambda(a, b).$$

Finalmente, tomando supremo sobre todas las particiones de $\sigma([a, c])$ se tiene la desigualdad deseada.

Probemos ahora que $\Lambda(a, b) \leq \Lambda(a, c) + \Lambda(c, b)$. En efecto, sea \mathcal{P} una partición de $\sigma([a, b])$. Si $\sigma(c)$ no es un punto de esta partición lo agregamos y llamamos \mathcal{P}' a la nueva partición. Podemos dividir a \mathcal{P}' en dos subconjuntos. Uno que llamamos \mathcal{P}_1 son los puntos de \mathcal{P}' en el arco de curva $\sigma([a, c])$. Y \mathcal{P}_2 son los puntos de \mathcal{P}' en el arco $\sigma([c, b])$. El único punto en común es $\sigma(c)$. Se tiene,

$$|\Pi(\mathcal{P})| \leq |\Pi(\mathcal{P}')| = |\Pi(\mathcal{P}_1)| + |\Pi(\mathcal{P}_2)| \leq \Lambda(a, c) + \Lambda(c, b).$$

Tomando supremo sobre todas las particiones de $\sigma([a, b])$ se tiene la desigualdad buscada. \square

COROLARIO 1.1. *La función $t \rightarrow \Lambda(a, t)$ de $[a, b]$ en \mathbb{R} es estrictamente creciente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $t' > t$. Entonces, por la Proposición 1.5,

$$\Lambda(a, t') = \Lambda(a, t) + \Lambda(t, t') > \Lambda(a, t).$$

\square

Podemos ahora probar

TEOREMA 1.1. *Sea \mathcal{C} una curva abierta, simple, suave y sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de \mathcal{C} . Entonces,*

$$\text{Long}(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt.$$

DEMOSTRACIÓN. Siguiendo la notación de la Proposición 1.5, queremos probar que $\Lambda(a, b) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt$.

Sea $h > 0$. Por la Proposición 1.5

$$\Lambda(a, t+h) - \Lambda(a, t) = \Lambda(t, t+h).$$

Por otro lado, como $\|\sigma(t+h) - \sigma(t)\|$ es la longitud de una poligonal de extremos $\sigma(t)$ y $\sigma(t+h)$, aplicando la definición de Λ y la cota de la longitud probada en la Proposición 1.6 tenemos

$$\|\sigma(t+h) - \sigma(t)\| \leq \Lambda(t, t+h) \leq \int_t^{t+h} \|\sigma'(s)\| ds.$$

Por lo tanto, dividiendo por $h > 0$ tenemos

$$\left\| \frac{\sigma(t+h) - \sigma(t)}{h} \right\| \leq \frac{\Lambda(a, t+h) - \Lambda(a, t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\sigma'(s)\| ds.$$

El primer y el último miembro de esta serie de desigualdades tiende a $\|\sigma'(t)\|$ cuando $h \rightarrow 0$ por ser σ' continua. Por lo tanto, existe el límite del miembro del medio y coincide con $\|\sigma'(t)\|$. Es decir,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Lambda(a, t+h) - \Lambda(a, t)}{h} = \|\sigma'(t)\|.$$

Con un razonamiento análogo se prueba este límite cuando $h \rightarrow 0^-$. De aquí que la función $t \rightarrow \Lambda(a, t)$ es una primitiva de $\|\sigma'(t)\|$. Como $\Lambda(a, a) = 0$ (ya que $\lim_{t \rightarrow a} \Lambda(a, t) = 0$),

$$\Lambda(a, t) = \int_a^t \|\sigma'(s)\| ds.$$

Esta igualdad es válida para todo $t \in [a, b]$ y por lo tanto también vale para $t = b$. \square

OBSERVACIÓN 1.3. Observemos que la variación instantánea de la longitud del arco entre $\sigma(a)$ y $\sigma(t)$ es $\|\sigma'(t)\|$. En el caso particular en que σ es la trayectoria de una partícula, se tiene que la variación instantánea de la distancia recorrida –la rapidez de la partícula– está dada, entonces, por $\|\sigma'(t)\|$ lo que termina de justificar que llamemos “vector velocidad” a $\sigma'(t)$.

OBSERVACIÓN 1.4. A la función $g(t) := \Lambda(a, t)$ se la llama “función de longitud de arco”. Por las propiedades demostradas se tiene que g es continuamente diferenciable y estrictamente creciente. Si $\sigma'(t) \neq (0, 0, 0)$ para todo $t \in [a, b]$ se sigue que $g'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Por lo tanto, la inversa de g es una función continuamente diferenciable definida en el intervalo $[0, \ell]$ con $\ell = \text{Long}(\mathcal{C})$ ($\mathcal{C} = \sigma([a, b])$).

Llamemos $s = g(t)$, la longitud del arco de la curva \mathcal{C} entre $\sigma(a)$ y $\sigma(t)$. Sea $\gamma(s) = \sigma(g^{-1}(s))$ para $s \in [0, \ell]$. Entonces γ es una parametrización regular de \mathcal{C} con la propiedad de que la longitud del arco de \mathcal{C} entre $\gamma(0)$ y $\gamma(s)$ es s .

Decimos que \mathcal{C} está parametrizada por longitud de arco. A s lo llamamos “parámetro de longitud de arco”.

Esto justifica la notación ds que se utiliza para el diferencial de longitud de arco. (Ver Sección 1.2)

Observemos que $\|\gamma'(s)\| = 1$. En efecto, $(g^{-1})'(s) = 1/g'(t)$ si $s = g(t)$. Por la regla de la cadena,

$$\gamma'(s) = \sigma'(t)(g^{-1})'(s) = \frac{\sigma'(t)}{g'(t)}.$$

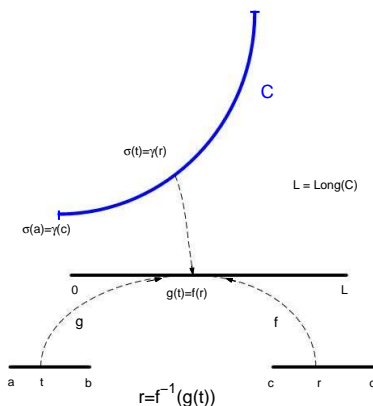
DEFINICIÓN 1.10. Sea \mathcal{C} una curva abierta, simple, suave. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de \mathcal{C} . Sea $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ una biyección C^1 con $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Sea $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(r) = \sigma(h^{-1}(r))$. Entonces, γ es una parametrización regular de \mathcal{C} . Decimos que γ es una “reparametrización de σ ”.

Al comienzo de esta sección ya comentamos que dadas dos parametrizaciones regulares de una curva abierta, simple y suave, se tiene una biyección continua entre los correspondientes intervalos de parámetros. Lo que vamos a ver a continuación es que esa biyección puede tomarse continuamente diferenciable.

PROPOSICIÓN 1.6. Sean $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones regulares de una curva abierta, simple, suave \mathcal{C} . Entonces, γ es una reparametrización de σ .

DEMOSTRACIÓN. Sea $g(t)$ la longitud del arco de curva \mathcal{C} entre $\sigma(a)$ y $\sigma(t)$. Como vimos en la Observación 1.4, g es una biyección entre $[a, b]$ y $[0, \ell]$ donde ℓ es la longitud de \mathcal{C} . Además, g es estrictamente creciente y C^1 con $g'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Análogamente, supongamos por simplicidad que $\sigma(a) = \gamma(c)$. Definimos $f(r)$ para $r \in [c, d]$ como la longitud del arco de \mathcal{C} entre $\gamma(c)$ y $\gamma(r)$. Y se tiene que f es una biyección estrictamente creciente y C^1 entre $[c, d]$ y $[0, \ell]$ con $f'(r) \neq 0$ para todo $r \in [c, d]$.



Sea ahora $h(t) = f^{-1}(g(t))$. Se tiene que h es una biyección estrictamente creciente y C^1 entre $[a, b]$ y $[c, d]$ con $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Además, dado $t \in [a, b]$, sea $r \in [c, d]$ tal que $\gamma(r) = \sigma(t)$. Entonces, $g(t) = f(r)$. De donde, $r = f^{-1}(g(t))$. Por lo tanto, $\gamma(h(t)) = (\gamma(r)) = \sigma(t)$ lo que demuestra que γ es una reparametrización de σ .

Si se tuviera $\sigma(a) = \gamma(d)$ tomamos como función $f(r)$ la longitud del arco de curva \mathcal{C} entre $\gamma(d)$ y $\gamma(r)$. En este caso, f es estrictamente decreciente. $f(r) = \ell -$ la longitud del arco de \mathcal{C} entre $\gamma(c)$ y $\gamma(r)$. El resto de la demostración sigue igual. \square

EJEMPLO 1.1. Hallar la longitud de la hélice de parametrización $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ con $t \in [0, 4\pi]$.

Tenemos $\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$. Por lo tanto $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2}$. La longitud del arco de hélice entre $(1, 0, 0)$ y $(\cos t, \sin t, t)$ es

$$g(t) = \int_0^t \sqrt{2} d\tau = \sqrt{2}t.$$

En particular, la longitud de la curva es $\sqrt{2}4\pi$.

Si queremos reparametrizar por longitud de arco tenemos que hallar $g^{-1}(s)$.

Tenemos $s = g(t) = \sqrt{2}t$. Por lo tanto, despejando t en función de s tenemos $t = g^{-1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}s = 2^{-1/2}s$.

Definimos $\tilde{\sigma}(s) = \sigma(g^{-1}(s)) = (\cos(2^{-1/2}s), \sin(2^{-1/2}s), 2^{-1/2}s)$, con $s \in [0, \sqrt{2}4\pi]$. Esto nos parametriza la hélice por longitud de arco.

Ejercicios

EJERCICIO 1.10. Considerar una partícula que se mueve siguiendo la trayectoria $\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Hallar la velocidad, rapidez, y la longitud del arco descrito por la partícula entre los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(1)$. Observar que σ describe la función de posición de un punto en un círculo de radio 1, que va rodando. La curva que describe se conoce como cicloide.

EJERCICIO 1.11. En los siguientes casos, calcular la longitud de la curva, donde σ es una parametrización de la misma sobre el intervalo $[a, b]$, siendo:

1. $\sigma(t) = (t, t^2)$ $a = 0, b = 1$
2. $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t + 1, t)$ $a = 10, b = 20$

EJERCICIO 1.12. Sea \mathcal{C} la curva dada por

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases} \quad t > 0$$

Parametrizar esta curva por longitud de arco.

3. Integral de longitud de arco

Supongamos que tenemos un alambre de un material homogéneo que ocupa una región del espacio que podemos pensar como una curva \mathcal{C} suave. La masa del alambre podemos pensarla como una proporción de su longitud ya que estamos despreciando las otras dimensiones espaciales del alambre. Llamamos “densidad lineal de masa” a esta proporción.

Si el alambre está formado por un material inhomogéneo, la densidad lineal de masa será una función continua definida sobre la curva \mathcal{C} . ¿Cómo calcular la masa total del alambre en este caso?

Como la función $\rho(x, y, z)$ definida en \mathcal{C} es continua, podemos pensar que es casi constante en pedacitos del alambre de longitud pequeña. Partamos al alambre en n pedacitos de longitud ℓ/n donde ℓ es la longitud de \mathcal{C} . Para eso, sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de \mathcal{C} de clase C^1 y $g(t)$ la función de longitud de arco ($g(t)$ = longitud del arco entre $\sigma(a)$ y $\sigma(t)$). Sabemos que g es estrictamente creciente. Tomemos sucesivamente puntos $t_k \in [a, b]$ tales que $g(t_k) = k\ell/n$, para $k = 0, 1, \dots, n$. Si $P_k = \sigma(t_k)$ se tiene que la longitud del arco de curva \mathcal{C} entre P_k y P_{k+1} es ℓ/n . Por lo tanto, podemos aproximar a ρ por un valor constante digamos el valor que toma en un punto $\tilde{P}_k = \sigma(\tilde{t}_k)$ con $\tilde{t}_k \in [t_k, t_{k+1}]$. De este modo, la masa del pedazo de alambre entre los punto P_k y P_{k+1} será aproximadamente $\rho(\tilde{P}_k)\Lambda(t_k, t_{k+1})$.

Sumando sobre todos los pedacitos y recordando que $\Lambda(t_k, t_{k+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$ tenemos que la masa total será aproximadamente

$$M \sim \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\sigma(\tilde{t}_k)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt.$$

Por otro lado, por una variante del teorema del valor medio integral (ver demostración del Teorema 1.2),

$$\int_a^b \rho(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \rho(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\sigma(t_k^*)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$$

para un $t_k^* \in [t_k, t_{k+1}]$.

De aquí que (con $\Delta\ell = \ell/n$),

$$\sum_{k=0}^{n-1} \rho(\tilde{P}_k) \Delta\ell \rightarrow \int_a^b \rho(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

como veremos en el siguiente teorema.

Esta integral nos da entonces la masa total del alambre.

Siguiendo estas ideas probamos el siguiente teorema.

TEOREMA 1.2. *Sea \mathcal{C} una curva abierta, simple, suave que admite una parametrización regular $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sea f una función continua definida sobre \mathcal{C} . Entonces, existe*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{P}_k) \Delta\ell$$

para cualquier elección de punto \tilde{P}_k en el arco de curva entre los puntos P_k y P_{k+1} de la partición de \mathcal{C} en n arcos de longitud ℓ/n con $\ell = \text{Long } \mathcal{C}$. Este límite coincide con

$$(1.4) \quad \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt.$$

Observemos que, en particular, la integral (1.4) es independiente de la parametrización regular elegida.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que

$$(1.5) \quad \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt = \sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma(t_k^*)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$$

para un $t_k^* \in [t_k, t_{k+1}]$.

En efecto, sean $M_k = \max_{[t_k, t_{k+1}]} f(\sigma(t))$, $m_k = \min_{[t_k, t_{k+1}]} f(\sigma(t))$. Como $\|\sigma'(t)\| > 0$ se sigue que

$$m_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt \leq M_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt}{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt} \in [m_k, M_k].$$

Como la función $f(\sigma(t))$ es continua, existe $t_k^* \in [t_k, t_{k+1}]$ tal que

$$\frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt}{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt} = f(\sigma(t_k^*))$$

y, usando la aditividad de la integral, se sigue (1.5).

Por lo tanto, como $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$ es la longitud del arco de curva entre $\sigma(t_k)$ y $\sigma(t_{k+1})$ que es ℓ/n se tiene

$$(1.6) \quad \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{P}_k) \Delta\ell - \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} [f(\tilde{P}_k) - f(\sigma(t_k^*))] \Delta\ell \right| \\ \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\tilde{P}_k) - f(P_k^*)| \Delta\ell$$

con $P_k^* = \sigma(t_k^*)$.

Como la distancia entre dos puntos de \mathcal{C} es menor o igual que la longitud del arco de curva \mathcal{C} que los contiene, la distancia entre los puntos \tilde{P}_k y P_k^* es a lo sumo ℓ/n .

Como f es continua, es uniformemente continua. Esto quiere decir que $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ si $\|P - Q\| < \delta$ independientemente de dónde se encuentren los puntos $P, Q \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, si n es suficientemente grande, (1.6) da

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{P}_k) \Delta\ell - \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt \right| < \varepsilon\ell.$$

De modo que el teorema queda demostrado. \square

DEFINICIÓN 1.11. Sea \mathcal{C} una curva abierta, simple, suave que admite una parametrización regular. Sea f una función continua definida sobre \mathcal{C} llamamos “integral de f en \mathcal{C} respecto de longitud de arco” al límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{P}_k) \Delta \ell$$

para cualquier elección de punto \tilde{P}_k en el arco de curva entre los puntos P_k y P_{k+1} de la partición de \mathcal{C} en n arcos de longitud ℓ/n con $\ell = \text{Long } \mathcal{C}$. A este límite lo denotamos indistintamente

$$\int_{\mathcal{C}} f d\ell \quad \text{o} \quad \int_{\mathcal{C}} f ds.$$

La justificación de la notación ds para el diferencial de longitud de arco viene del hecho de que en general llamamos s al parámetro de longitud de arco y, por la definición de integral de longitud de arco, $\int_{\mathcal{C}} ds$ es la longitud de \mathcal{C} . (Además, recordemos que $\|\tilde{\sigma}'(s)\| = 1$ cuando parametrizamos por longitud de arco).

Ejercicios

EJERCICIO 1.13. Evaluar las integrales de longitud de arco $\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds$, donde σ es una parametrización de \mathcal{C} , en los casos siguientes

1. $f(x, y, z) = x + y + z$, $\sigma(t) = (\text{sent}, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$
2. $f(x, y, z) = \cos z$, σ como en la parte 1.
3. $f(x, y, z) = x \cos z$, $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$, $t \in [0, 1]$

EJERCICIO 1.14.

1. Mostrar que la integral de longitud de arco de $f(x, y)$ a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

2. Calcular la longitud de la curva $r = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

EJERCICIO 1.15. Suponer que la semicircunferencia parametrizado por:

$$\sigma(\theta) = (0, a \text{ sen } \theta, a \text{ cos } \theta), \quad \theta \in [0, \pi],$$

con $a > 0$, está hecha de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

1. ¿Cuál es la masa total del alambre?
2. ¿Dónde está el centro de masa de esta configuración de alambre?
3. Si la temperatura ambiente es igual a $x + y - z$ en el punto (x, y, z) , calcular la temperatura promedio sobre el alambre.

EJERCICIO 1.16. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, el gráfico de f en $[a, b]$ es una curva que se puede parametrizar como $\sigma(t) = (t, f(t))$ para $t \in [a, b]$.

1. Mostrar que la longitud del gráfico de f en $[a, b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

2. Hallar la longitud del gráfico de $y = \log x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

EJERCICIO 1.17. Se quiere pintar una cerca que se encuentra sobre un campo ondulado. La cerca se encuentra a una distancia variable de una ruta recta que supondremos que ocupa el eje y .

Pongamos el kilómetro 0 de la ruta a la altura del comienzo de la cerca. Esta se encuentra entre los kilómetros 0 y 1, a una distancia variable igual a $y(1 - y) + 1$ del kilómetro y de la ruta (calculada sobre el plano del nivel del mar).

Nuestra cerca tiene altura variable $h = \frac{1+y}{750}$ a la altura del kilómetro y de la ruta si $0 \leq y \leq 1/2$ y $h = \frac{2-y}{750}$ si $1/2 \leq y \leq 1$.

Si 1 litro de pintura rinde $4 m^2$ ¿Cuántos litros de pintura tengo que comprar?

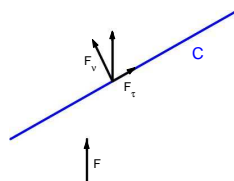
Observar que la superficie de la cerca será la integral de la altura h , con respecto a longitud de arco, sobre la curva proyección de la base de la cerca sobre el plano del nivel del mar aunque el campo sea ondulado.

4. Integrales curvilíneas

Consideremos el siguiente problema: Dada una fuerza \mathbf{F} que actúa sobre una partícula que se desplaza siguiendo una trayectoria $\sigma(t)$ entre dos puntos, ¿cuál es el trabajo que ejerce esta fuerza?

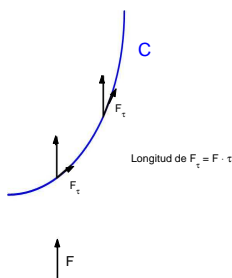
Aquí $\sigma(t)$ es la posición de la partícula en el instante t . En el caso en que la partícula se mueve sobre una recta, la fuerza es constante, sólo tiene componente en la dirección de esa recta y actúa en el sentido del recorrido, sabemos que el trabajo resultante es la magnitud de la fuerza $\|\mathbf{F}\|$ por la distancia recorrida. Si actúa en sentido contrario, el trabajo será $-\|\mathbf{F}\|$ por la distancia recorrida.

Consideremos ahora el caso en que la partícula se mueve en línea recta, la fuerza es constante, pero actúa en otra dirección. Observemos, para empezar, que la fuerza es suma de dos fuerzas. Una actúa en la dirección del movimiento de la partícula y la otra en la dirección perpendicular. Es decir, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\tau + \mathbf{F}_\nu$ donde $\mathbf{F}_\tau = (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau}$ y $\mathbf{F}_\nu \perp \boldsymbol{\tau}$. Donde $\boldsymbol{\tau}$ es un vector unitario que determina la dirección de la recta donde se mueve la partícula y da el sentido de recorrido de la partícula.



Por lo tanto, en este caso, el trabajo ejercido por la fuerza es $\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}$ por la distancia recorrida por la partícula, ya que la fuerza que actúa perpendicularmente al movimiento no ejerce ningún trabajo ya que no modifica la trayectoria de la partícula.

Supongamos que la partícula recorre una trayectoria de dirección variable –una curva \mathcal{C} – con velocidad no nula en todo momento y la fuerza es todavía constante. Tendremos la siguiente situación:



Finalmente, supongamos que la partícula recorre una trayectoria de dirección variable –una curva \mathcal{C} – con velocidad no nula en todo momento, y la fuerza no es constante pero es continua. Si la longitud del camino recorrido por la partícula es pequeña podemos aproximar la fuerza por una fuerza constante igual al valor que toma en cualquier punto de la curva, digamos P^* .

También podemos aproximar la curva por una de igual longitud pero dirección constante, por ejemplo, $\boldsymbol{\tau}(P^*) = \sigma'(t^*) / \|\sigma'(t^*)\|$ que determina la dirección y sentido de recorrido de la partícula al pasar por el punto $P^* = \sigma(t^*)$.

Podemos aproximar entonces el trabajo realizado por la cantidad $(F(P^*) \cdot \tau(P^*))$ por la longitud de la curva (la distancia recorrida por la partícula).

Si la curva es larga, la dividimos en n arcos de curva de longitud ℓ/n donde ℓ es la longitud de \mathcal{C} . El trabajo realizado será la suma de los trabajos realizados sobre la partícula al recorrer ésta cada uno de los arcos. Utilizando la aproximación que tenemos para el trabajo sobre cada arco tenemos la aproximación

$$T \sim \sum_{k=0}^{n-1} (F(P_k^*) \cdot \tau(P_k^*)) \ell/n.$$

donde el punto P_k^* está en el k -ésimo arco.

Observemos que el miembro derecho tiende a

$$\int_{\mathcal{C}} (\mathbf{F} \cdot \tau) d\ell$$

cuando n tiende a infinito, ya que lo que tenemos es una suma para la integral de longitud de arco de la función escalar $f = \mathbf{F} \cdot \tau$ que es una función continua sobre \mathcal{C} .

Recordemos que el vector tangente τ en el punto $P \in \mathcal{C}$ podemos calcularlo por la relación $\tau(P) = \sigma'(t)/\|\sigma'(t)\|$ si $P = \sigma(t)$. En particular, τ es una función vectorial continua sobre \mathcal{C} .

De modo que el trabajo estará dado en términos de la trayectoria σ por

$$\int_a^b \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt.$$

Estas consideraciones inducen las siguientes definiciones

DEFINICIÓN 1.12. Sea \mathcal{C} una curva abierta, simple, suave que admite una parametrización regular. Sea τ un campo de vectores unitarios tangentes a \mathcal{C} continuo. Este campo determina un sentido de recorrido sobre la curva \mathcal{C} . Decimos que \mathcal{C} está “orientada” por el campo τ .

Recordemos que el campo τ vendrá dado a partir de una parametrización regular $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ por la relación $\tau(P) = \sigma'(t)/\|\sigma'(t)\|$ si $P = \sigma(t)$. En este caso también decimos que \mathcal{C} está orientada por la parametrización σ .

DEFINICIÓN 1.13. Sea \mathcal{C} una curva abierta, simple, suave que admite una parametrización regular $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que la orienta. Sea \mathbf{F} un campo vectorial continuo definido sobre \mathcal{C} . Llamamos “integral curvilínea del campo \mathbf{F} sobre la curva orientada \mathcal{C} ” a

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds := \int_a^b \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt.$$

DEFINICIÓN 1.14. Sea \mathcal{C} una curva abierta, simple, suave orientada por la parametrización regular $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sea $\tilde{\sigma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ otra parametrización regular de \mathcal{C} . Decimos que $\tilde{\sigma}$ preserva la orientación de \mathcal{C} si para todo $P \in \mathcal{C}$, se tiene

$$\tau(P) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} = \frac{\tilde{\sigma}'(\tilde{t})}{\|\tilde{\sigma}'(\tilde{t})\|} \quad \text{si } P = \sigma(t) = \tilde{\sigma}(\tilde{t}) \text{ con } t \in [a, b], \tilde{t} \in [\tilde{a}, \tilde{b}].$$

Observemos que si $\tilde{\sigma}$ no preserva la orientación de \mathcal{C} se tiene

$$\frac{\tilde{\sigma}'(\tilde{t})}{\|\tilde{\sigma}'(\tilde{t})\|} = -\tau(P) \quad \text{para } P = \tilde{\sigma}(\tilde{t}) \quad \text{para todo } \tilde{t} \in [\bar{a}, \bar{b}].$$

Por lo tanto, si $\tilde{\sigma}$ preserva la orientación de \mathcal{C} se tiene

$$\int_a^b \mathbf{F}(\tilde{\sigma}(\tilde{t})) \cdot \tilde{\sigma}'(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{F} \cdot \tau) dl = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds.$$

Y si $\tilde{\sigma}$ no preserva la orientación de \mathcal{C} se tiene

$$\int_a^b \mathbf{F}(\tilde{\sigma}(\tilde{t})) \cdot \tilde{\sigma}'(\tilde{t}) d\tilde{t} = - \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{F} \cdot \tau) dl = - \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds.$$

EJEMPLO 1.2. Sea \mathcal{C} la curva orientada dada por la parametrización $\sigma(t) = (t, t^2)$ con $t \in [0, 1]$. Sea $\mathbf{F}(x, y) = -(x, y)$ un campo de fuerzas (actúa en cada punto en dirección al origen). Supongamos que una partícula se desplaza por la curva \mathcal{C} siguiendo la trayectoria σ (es decir, la posición de la partícula en el instante t es $\sigma(t)$). Hallar el trabajo efectuado por la fuerza sobre la partícula.

El trabajo es

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds = \int_0^1 \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_0^1 -(t, t^2) \cdot (1, 2t) dt = - \int_0^1 [t + 2t^3] dt = - \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2} \right]_0^1 = -1.$$

OBSERVACIÓN 1.5. Para la integral curvilínea de un campo $\mathbf{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ sobre una curva orientada \mathcal{C} se utiliza indistintamente las notaciones

$$(1.7) \quad \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds \quad \text{o} \quad \int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy + R dz.$$

La idea de esta última notación es que si $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una parametrización regular de \mathcal{C} que preserve la orientación de \mathcal{C} ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds &= \int_a^b \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt \\ &= \int_a^b \left(P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \right) dt \end{aligned}$$

que es lo mismo que se obtiene si se escribe $dx = x'(t) dt$, $dy = y'(t) dt$, $dz = z'(t) dt$ en el miembro derecho de (1.7) y se evalúan las funciones P , Q y R en $(x(t), y(t), z(t))$.

Ejercicios

EJERCICIO 1.18. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Evaluar la integral curvilínea de \mathbf{F} a lo largo de las curvas orientadas \mathcal{C} dadas por las siguientes parametrizaciones:

1. $\sigma(t) = (t, t, t)$, $0 \leq t \leq 1$
2. $\sigma(t) = (\sin t, 0, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

EJERCICIO 1.19. Para las curvas orientadas \mathcal{C} parametrizadas por las correspondientes funciones σ , evaluar las integrales siguientes:

1. $\int_{\mathcal{C}} x dy - y dx$, $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
2. $\int_{\mathcal{C}} x dx + y dy$, $\sigma(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$, $0 \leq t \leq 2$

EJERCICIO 1.20. Considerar la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.

EJERCICIO 1.21. Sea \mathcal{C} una curva orientada suave parametrizada por σ .

1. Suponer que \mathbf{F} es perpendicular a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ para todo t . Mostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

2. Si \mathbf{F} es paralelo a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ para todo t , mostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \|\mathbf{F}\| ds.$$

(Aquí, por paralelo a $\sigma'(t)$ se entiende que $\mathbf{F}(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$, donde $\lambda(t) > 0$.)

EJERCICIO 1.22. ¿Cuál es el valor de la integral curvilínea de un campo gradiente sobre una curva cerrada C ?

EJERCICIO 1.23. Suponer que $\nabla f(x, y, z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$. Si $f(0, 0, 0) = 5$, hallar $f(1, 1, 2)$.

EJERCICIO 1.24. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido (para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$) por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z).$$

Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) , a lo largo de cualquier trayectoria, depende sólo de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

EJERCICIO 1.25. Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 , $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo C^1 y $\mathbf{F} = \nabla f + \mathbf{G}$. Sea \mathcal{C} una curva cerrada, simple, suave, orientada. Verificar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$

EJERCICIO 1.26. Sea \mathcal{C} una curva suave, $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de \mathcal{C} . Sea $g : [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow [a, b]$ una biyección C^1 con $g'(\tau) \neq 0$ para todo $\tau \in [a, b]$. Sea $\bar{\sigma} : [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{\sigma}(s) = \sigma(g(s))$. Llamamos a $\bar{\sigma}$ una **reparametrización** de σ .

1. Probar que $\bar{\sigma}$ es una parametrización regular de \mathcal{C} .

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Ver que el cálculo de $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$ da el mismo resultado cuando la integral se evalúa utilizando la parametrización σ o la parametrización $\bar{\sigma}$.
3. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua. Suponer que orientamos a \mathcal{C} con la orientación dada por σ . Ver que el cálculo de $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ utilizando la parametrización $\bar{\sigma}$ da el mismo resultado que cuando se utiliza σ , si $\bar{\sigma}$ preserva la orientación de \mathcal{C} . Ver que si no es así, los resultados difieren sólo en el signo.

Realizar este ejercicio utilizando sólo la fórmula que da las integrales sin utilizar los resultados teóricos, es decir, comparando integrales en intervalos de la recta.

CAPÍTULO 2

Superficies

1. Parametrizaciones y suavidad

DEFINICIÓN 2.1. Una superficie paramétrica (superficie a secas para nosotros) es un conjunto de puntos del espacio que puede describirse por medio de dos parámetros. Más precisamente, \mathcal{S} es una superficie si existen funciones continuas $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ definidas en un dominio elemental $D \subset \mathbb{R}^2$ tales que $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ si y sólo si existe $(u, v) \in D$ con $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$.

En este caso, llamamos a $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ una parametrización de \mathcal{S} .

DEFINICIÓN 2.2. Sea \mathcal{S} una superficie, $P_0 \in \mathcal{S}$ y Π_0 un plano por P_0 . Sea ν_0 un vector de longitud 1 perpendicular a Π_0 . Decimos que Π_0 es el plano tangente a \mathcal{S} en P_0 si la recta por P y P_0 con $P \in \mathcal{S}$ tiende a ser perpendicular a ν_0 a medida que P se acerca a P_0 . Más precisamente, si

$$\frac{P - P_0}{\|P - P_0\|} \cdot \nu_0 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } P \rightarrow P_0 \text{ con } P \in \mathcal{S}.$$

Aquí $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ denota el producto escalar de los vectores \mathbf{v} y \mathbf{w} . Recordemos que si \mathbf{v} y \mathbf{w} tienen longitud 1, el producto escalar da el coseno del ángulo determinado por los vectores. En particular, los vectores son perpendiculares si y sólo si su producto escalar es 0 y están en la misma recta si el producto escalar es 1 o -1 .

OBSERVACIÓN 2.1. Sea $P_0 \in \mathcal{S}$ y ν_0 un vector de norma 1. Sea Π_0 el plano perpendicular a ν_0 por P_0 . Entonces Π_0 es el plano tangente a \mathcal{S} en P_0 si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{S}$ y $\|P - P_0\| < \delta$ se sigue que

$$(2.8) \quad \left| \frac{P - P_0}{\|P - P_0\|} \cdot \nu_0 \right| < \varepsilon.$$

Como

$$\frac{P - P_0}{\|P - P_0\|} \cdot \nu_0 = \cos \alpha(P)$$

donde $\alpha(P)$ es el ángulo entre el vector $P - P_0$ y ν_0 , la condición (2.8) dice que, en la bola $B_\delta(P_0)$, la superficie \mathcal{S} queda fuera del cono de eje ν_0 y apertura $\theta \in [0, \pi/2]$ donde $\cos \theta = \varepsilon$, ya que $|\cos \alpha(P)| < \cos \theta$ ($= -\cos(\pi - \theta)$) implica que $\theta < \alpha(P) < \pi - \theta$.

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, la condición geométrica que caracteriza al plano tangente en P_0 es que para todo cono con eje ν_0 , exista un entorno de P_0 tal que, en ese entorno, la superficie \mathcal{S} queda fuera del cono.

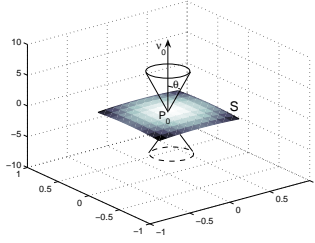


FIGURA 1. Un cono de apertura θ con eje ν_0 y vértice P_0 sobre la superficie \mathcal{S} .

TEOREMA 2.1. *Sea \mathcal{S} una superficie. Si existe una parametrización $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva, diferenciable en $(u_0, v_0) \in D$ tal que los vectores derivados $T_u(u_0, v_0)$, $T_v(u_0, v_0)$ no son paralelos y son no nulos, el plano Π_0 por $P_0 = T(u_0, v_0)$ que determinan estos dos vectores derivados es tangente a \mathcal{S} en P_0 .*

OBSERVACIÓN 2.2. En este caso se puede tomar

$$\nu_0 = \frac{T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)}{\|T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)\|}$$

donde $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ denota el producto vectorial de \mathbf{v} y \mathbf{w} .

Si $\nu_0 = (a_0, b_0, c_0)$, la ecuación del plano tangente es (aquí $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$),

$$\Pi_0 : a_0(x - x_0) + b_0(y - y_0) + c_0(z - z_0) = 0.$$

Notemos que no es necesario tomar un versor ν_0 para encontrar la ecuación de Π_0 . Es decir, si

$$T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0) = (a, b, c),$$

se tiene

$$\Pi_0 : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.1. Sean T y (u_0, v_0) como en el enunciado. Queremos ver que si $N_0 = T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)$ y $\nu_0 = N_0/\|N_0\|$, se sigue que

$$(2.9) \quad \frac{T(u, v) - T(u_0, v_0)}{\|T(u, v) - T(u_0, v_0)\|} \cdot \nu_0 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } (u, v) \rightarrow (u_0, v_0).$$

En efecto, si $P_n \in \mathcal{S}$ y $P_n \rightarrow P_0$ existen únicos $(u_n, v_n) \in D$ tales que $P_n = T(u_n, v_n)$. Como se demostró en el caso de curvas, se puede ver que necesariamente $(u_n, v_n) \rightarrow (u_0, v_0)$ ya que (u_0, v_0) es el único posible punto de acumulación de la sucesión.

Para probar (2.9), observemos primero que, por el desarrollo de Taylor,

$$T(u, v) - T(u_0, v_0) = T_u(u_0, v_0)(u - u_0) + T_v(u_0, v_0)(v - v_0) + R(u, v; u_0, v_0).$$

El término $R(u, v; u_0, v_0)$ –llamado Resto de Taylor– tiende a 0 más rápido que $\|(u - u_0, v - v_0)\|$, cuando $\|(u - u_0, v - v_0)\| \rightarrow 0$. Es decir,

$$\frac{R(u, v; u_0, v_0)}{\|(u - u_0, v - v_0)\|} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \|(u - u_0, v - v_0)\| \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, dados $\gamma > 0$ y $0 < \varepsilon < 1$ existe δ_0 tal que si $\|(u - u_0, v - v_0)\| < \delta_0$ se sigue que

$$(2.10) \quad \|R(u, v; u_0, v_0)\| < \varepsilon \frac{\gamma}{2} \|(u - u_0, v - v_0)\|.$$

Por hipótesis, $T_u(u_0, v_0)$ y $T_v(u_0, v_0)$ son no nulos y el ángulo α entre ellos está en $(0, \pi)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} & \|T_u(u_0, v_0)(u - u_0) + T_v(u_0, v_0)(v - v_0)\|^2 \\ &= \|T_u(u_0, v_0)\|^2 (u - u_0)^2 + \|T_v(u_0, v_0)\|^2 (v - v_0)^2 \\ &\quad + 2 \|T_u(u_0, v_0)\| \|T_v(u_0, v_0)\| (u - u_0)(v - v_0) \cos \alpha \\ &\geq (1 - |\cos \alpha|) [\|T_u(u_0, v_0)\|^2 (u - u_0)^2 + \|T_v(u_0, v_0)\|^2 (v - v_0)^2] \\ &\quad + |\cos \alpha| [\|T_u(u_0, v_0)\| |u - u_0| - \|T_v(u_0, v_0)\| |v - v_0|]^2 \\ &\geq (1 - |\cos \alpha|) [\|T_u(u_0, v_0)\|^2 (u - u_0)^2 + \|T_v(u_0, v_0)\|^2 (v - v_0)^2] \geq \gamma^2 [(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2] \end{aligned}$$

con $\gamma^2 > 0$ igual a $(1 - |\cos \alpha|)$ por el mínimo entre $\|T_u(u_0, v_0)\|^2$ y $\|T_v(u_0, v_0)\|^2$.

De aquí que

$$(2.11) \quad \|T(u, v) - T(u_0, v_0)\| \geq \gamma \|(u - u_0, v - v_0)\| - \|R(u, v; u_0, v_0)\| \geq \frac{\gamma}{2} \|(u - u_0, v - v_0)\|$$

si $\|(u - u_0, v - v_0)\| < \delta_0$.

Recordemos que $\nu_0 = N_0 / \|N_0\|$. Se tiene,

$$\begin{aligned} (P - P_0) \cdot N_0 &= (T_u(u_0, v_0)(u - u_0) + T_v(u_0, v_0)(v - v_0) + R(u, v; u_0, v_0)) \cdot (T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)) \\ &= R(u, v; u_0, v_0) \cdot (T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)). \end{aligned}$$

Usando las estimaciones (2.10) y (2.11) tenemos

$$\left| \frac{P - P_0}{\|P - P_0\|} \cdot \nu_0 \right| \leq \frac{2}{\gamma} \frac{\|R(u, v; u_0, v_0)\|}{\|(u - u_0, v - v_0)\|} < \varepsilon$$

si $\|(u - u_0, v - v_0)\| < \delta_0$.

Esto demuestra el teorema. □

DEFINICIÓN 2.3. Una superficie \mathcal{S} es suave si tiene plano tangente en todos sus puntos y la recta $L(P)$ perpendicular al plano tangente en $P \in \mathcal{S}$ varía continuamente con P .

PROPOSICIÓN 2.1. Si \mathcal{S} es una superficie que tiene una parametrización $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva, C^1 , con $T_u \times T_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in D$, se tiene que \mathcal{S} es suave.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\nu(P) = \frac{T_u(u,v) \times T_v(u,v)}{\|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\|}$ para (u, v) el único par tal que $P = T(u, v)$. Como T es inyectiva y continua, $P \rightarrow P_0 = T(u_0, v_0)$ si y sólo si $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$ y como $T_u \times T_v \neq 0$ para todo (u, v) , se sigue que $\nu(P) \rightarrow \nu(P_0)$ cuando $P \rightarrow P_0$.

Esto demuestra que el plano tangente varía con continuidad. Luego, la superficie es suave. \square

DEFINICIÓN 2.4. A una parametrización T con las propiedades de la Proposición 2.1 la llamamos “regular”.

PROPOSICIÓN 2.2. Sea \mathcal{S} el gráfico de una función C^1 , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio elemental. Entonces \mathcal{S} es una superficie suave y la ecuación del plano tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es

$$(2.12) \quad z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

DEMOSTRACIÓN. Una parametrización de \mathcal{S} es $T(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Se tiene

$$T_x = (1, 0, f_x) \quad T_y = (0, 1, f_y) \quad T_x \times T_y = (-f_x, -f_y, 1) \neq (0, 0, 0).$$

Por lo tanto, \mathcal{S} es suave y la ecuación del plano tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es (2.12). \square

PROPOSICIÓN 2.3. Sea \mathcal{S} una superficie dada en forma implícita por

$$\mathcal{S} : F(x, y, z) = 0$$

donde $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 y $\nabla F(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ para todo (x, y, z) .

Entonces, \mathcal{S} es una superficie suave y la ecuación del plano tangente en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ es

$$(2.13) \quad F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$ alguna de las coordenadas es no nula. Supongamos que $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Por el Teorema de la Función Implícita existe un entorno \mathcal{U} de (x_0, y_0, z_0) y una función $f(x, y)$ definida en un entorno D del punto (x_0, y_0) tal que los puntos $(x, y, z) \in \mathcal{S} \cap \mathcal{U}$ son de la forma $(x, y, f(x, y))$ para un único punto $(x, y) \in D$ y $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Por la Proposición 2.2 sabemos que $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}$ es una superficie suave y que la ecuación del plano tangente a \mathcal{S} en el punto (x_0, y_0, z_0) ($z_0 = f(x_0, y_0)$) está dada por (2.12).

Por otro lado, el Teorema de la Función Implícita da que

$$f_x(x_0, y_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)} \quad f_y(x_0, y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Reemplazando en (2.12) y multiplicando por $F_z(x_0, y_0, z_0)$ obtenemos (2.13).

Como z era cualquiera de las variables, llegamos a la misma ecuación en todos los casos. \square

EJEMPLO 2.1. Sea $T(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^2)$ para $0 \leq \rho \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. T es la parametrización de una superficie y es C^1 . Pero T no es inyectiva ya que el punto $(0, 0, 0)$ es imagen de cualquier punto $(0, \theta)$. Además,

$$T_\rho = (\cos \theta, \sin \theta, 2\rho) \quad T_\theta = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0) \quad T_\rho \times T_\theta = (-2\rho^2 \cos \theta, -2\rho^2 \sin \theta, \rho)$$

que se anula para $\rho = 0$. Pero no se anula si $\rho \neq 0$.

¿Cómo saber si la superficie tiene plano tangente en el $(0, 0, 0)$? Una posibilidad es mirar a las rectas normales en puntos cercanos. Si estas rectas se acercan a alguna en particular, ésta será candidata a ser recta normal en el origen. Calculemos:

$$\nu(P) = \frac{T_\rho(\rho, \theta) \times T_\theta(\rho, \theta)}{\|T_\rho(\rho, \theta) \times T_\theta(\rho, \theta)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 8\rho^2}}(-2\rho \cos \theta, -2\rho \sin \theta, 1) \text{ para } (0, 0, 0) \neq P = T(\rho, \theta).$$

(Observemos que obtenemos los mismos versores normales cuando utilizamos $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$).

Vemos que existe el límite de $\nu(P)$ cuando $P \rightarrow (0, 0, 0)$ (obtenemos el $(0, 0, 1)$). Nuestra candidata a recta normal será el eje z .

Observemos que obtendríamos la misma conclusión si en algún caso el límite es $(0, 0, 1)$ y en otro es $(0, 0, -1)$ ya que lo que tenemos que verificar es que se llega a generadores de la misma recta.

Veamos que efectivamente el eje z es normal a la superficie en el origen (y por lo tanto, el plano $z = 0$ es el plano tangente en el origen).

Sea $P = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^2)$ con ρ chico para que P esté cerca del origen. Tenemos,

$$\left| \frac{P}{\|P\|} \cdot (0, 0, 1) \right| = \frac{\rho^2}{\rho\sqrt{1 + \rho^2}} \rightarrow 0 \text{ cuando } \rho \rightarrow 0.$$

Además, por lo que hemos visto, la normal es continua. Por lo tanto, la superficie es suave. (En los otros puntos la existencia de plano tangente y la continuidad del mismo se deducen directamente de la regularidad de la parametrización).

Observen que se trata del paraboloides $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

EJEMPLO 2.2. Sea $T(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho)$ para $0 \leq \rho \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Como en el ejemplo anterior, T es la parametrización de una superficie, $T \in C^1$ y T no es inyectiva.

Observemos que T es una parametrización del cono $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$ que no es una superficie suave. ¿Cómo lo vemos con esta parametrización? Como en el ejemplo anterior, calculamos el versor normal a la superficie para $P \neq (0, 0, 0)$ utilizando la parametrización dada. Obtenemos en este caso

$$\nu(P) = \frac{T_\rho(\rho, \theta) \times T_\theta(\rho, \theta)}{\|T_\rho(\rho, \theta) \times T_\theta(\rho, \theta)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos \theta, -\sin \theta, 1).$$

Este vector es independiente de ρ y es diferente para distintos valores de θ . Por lo tanto, no existe el límite de $\nu(P)$ cuando $P \rightarrow (0, 0, 0)$. Esto indica que la superficie no es suave en el origen. (No prueba que no hay plano tangente en el origen, pero eso se puede probar también).

DEFINICIÓN 2.5. Sea \mathcal{S} una superficie suave y $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de \mathcal{S} . Sea $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ un dominio elemental y $G : D_1 \rightarrow D$ una biyección, C^1 con Jacobiano no nulo. (Es decir, $|DG(u, v)| \neq 0$ para todo $(u, v) \in D_1$). Sea $T_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T_1(u, v) = T(G(u, v))$. Llamamos a T_1 una **reparametrización de T** .

PROPOSICIÓN 2.4. Sean \mathcal{S} , T y T_1 como en la Definición 2.5. Entonces, T_1 es una parametrización regular de \mathcal{S} . Más aún, $T_{1u}(u, v) \times T_{1v}(u, v) = (T_u(G(u, v)) \times T_v(G(u, v))) \mathcal{J}_G(u, v)$ donde \mathcal{J}_G es el determinante de la matriz asociada al diferencial de G .

DEMOSTRACIÓN. El resultado se deja como ejercicio. Sólo se tienen que calcular los vectores $T_{1u}(u, v)$ y $T_{1v}(u, v)$ usando regla de la cadena. Al calcular $T_{1u}(u, v) \times T_{1v}(u, v)$ se utiliza el hecho de que $T_u \times T_u = T_v \times T_v = 0$ y $T_u \times T_v = -T_v \times T_u$. \square

Ejercicios

EJERCICIO 2.1. Dadas las siguientes superficies en **coordenadas esféricas**, determinar su correspondiente ecuación en **coordenadas cartesianas** y graficar

1. $r = k$ ($k = cte$).
2. $\varphi = k$, $k \in (0, \pi/2]$ constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un **vector normal** en cada punto.

EJERCICIO 2.2.

1. Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\Phi_1(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right) \quad (a, b \text{ no nulos})$$

$$\Phi_2(u, v) = (au \cos(v), bu \sin(v), u^2)$$

son dos parametrizaciones del **paraboloide elíptico**.

2. Mostrar que

$$\Phi(u, v) = ((a + b \cos(u)) \sin(v), (a + b \cos(u)) \cos(v), b \sin(u))$$

$0 < b < a$, y $u, v \in [0, 2\pi]$, es una parametrización del **toro** es decir, de una superficie que se obtiene al girar alrededor del eje z una circunferencia en el plano y, z de radio menor a la distancia de su centro al eje z (dibuje).

EJERCICIO 2.3. Sea \mathcal{C} la curva en el plano xy dada en polares por:

$$r = 2 - \cos \theta \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

Sea \mathcal{S} la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje y .

1. Dar una parametrización de \mathcal{S} .
2. ¿Es suave esta superficie?

EJERCICIO 2.4. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera de radio a y centro en el origen en un punto (x_0, y_0, z_0) genérico de la esfera.

EJERCICIO 2.5. Encontrar una ecuación para el plano tangente en el punto $(0,1,1)$ a la superficie dada por la parametrización

$$x = 2u, \quad y = u^2 + v, \quad z = v^2.$$

EJERCICIO 2.6. Probar la Proposición 2.4

2. Area de una superficie

Sea \mathcal{S} una superficie suave. Queremos encontrar una forma de definir el área de \mathcal{S} que vuelva a darnos lo que tomamos como definición en el caso de superficies planas. Para ello, supongamos que tenemos una superficie \mathcal{S} contenida en el plano $\{z = 0\}$. Una parametrización de esta superficie tendrá necesariamente la forma

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v), 0), \quad (u, v) \in D.$$

Sea $G : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$.

Calculemos $T_u \times T_v$. Tenemos,

$$T_u = (x_u, y_u, 0) \quad T_v = (x_v, y_v, 0) \quad T_u \times T_v = \left(0, 0, \frac{J(x, y)}{J(u, v)}\right).$$

Por lo tanto, $\|T_u \times T_v\| = |DG|$.

Observemos que lo que hemos hecho no es otra cosa que representar la región plana \mathcal{S} contenida en el plano (x, y) por medio de un cambio de coordenadas dado por G . El Teorema de cambio de variables nos da un cálculo del área de \mathcal{S} en términos de una integral sobre D . A saber,

$$(2.14) \quad \text{Area}(\mathcal{S}) = \iint_D |DG(u, v)| \, du \, dv.$$

A esta fórmula se llegaba de la siguiente manera: Elegimos un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ que contenga a D y lo partimos de manera uniforme en rectángulitos $R_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$ con $u_i - u_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, $v_j - v_{j-1} = \frac{d-c}{n}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Consideramos sólo los rectángulos contenidos en D . Aquellos que cortan el borde de D suman un área que tiende a 0 cuando n tiende a infinito y por lo tanto se desprecian. De modo que

$$(2.15) \quad \text{Area}(\mathcal{S}) \sim \sum_{i,j / R_{ij} \subset D} \text{Area}(S_{ij}).$$

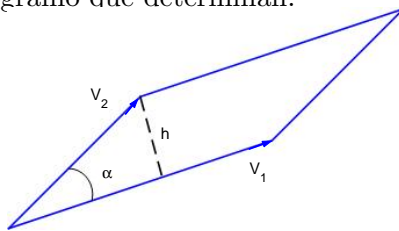
Aquí llamamos $S_{ij} = G(R_{ij})$. Si n es grande, vemos que la región S_{ij} es muy parecida al paralelogramo determinado por los vectores $G_u(u_{i-1}, v_{j-1})\Delta u$ y $G_v(u_{i-1}, v_{j-1})\Delta v$ que son linealmente independientes por la hipótesis de que $|DG(u_{i-1}, v_{j-1})| \neq 0$.

Esta área está dada por $|DG(u_{i-1}, v_{j-1})| \Delta u \Delta v$, y eso es lo que da finalmente en el límite para n tendiendo a infinito la relación (2.14).

Queremos hacer algo similar con una superficie no plana. Como antes, consideramos los rectángulos R_{ij} despreciando aquellos que no están contenidos en D y aproximamos aquello que queremos definir como el área de \mathcal{S} por (2.15) con $S_{ij} = T(R_{ij})$.

Para cada pequeña superficie S_{ij} , aproximamos lo que queremos que sea su área por la del paralelogramo determinado por los vectores $T_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta u$ y $T_v(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta v$ que es igual a $\|(T_u \times T_v)(u_{i-1}, v_{j-1})\| \Delta u \Delta v$.

En efecto, si $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^3$ son dos vectores no alineados, la norma del producto vectorial $\|V_1 \times V_2\|$ da el área del paralelogramo que determinan.



El área del paralelogramo es la longitud de la base por la altura. Por lo tanto, coincide con $\|V_1\| h = \|V_1\| \|V_2\| \sin \alpha = \|V_1 \times V_2\|$.

Por lo tanto, si existe el límite cuando n tiende a infinito de

$$\sum_{i,j / R_{ij} \subset D} \|(T_u \times T_v)(u_{i-1}, v_{j-1})\| \Delta u \Delta v,$$

se tiene que esa es una buena definición para el área de \mathcal{S} .

Pero ese límite existe y coincide con

$$\iint_D \|T_u \times T_v\| du dv.$$

Tomamos por lo tanto esta integral como definición de $\text{Area}(\mathcal{S})$. Después veremos que no depende de la parametrización utilizada para su cálculo, lo que es esencial para que resulte una buena definición.

Observemos que en el caso en que $\mathcal{S} \subset \{z = 0\}$, volvemos a obtener la fórmula (2.14).

3. Integral de superficie

A continuación vamos a definir lo que entenderemos por integral de superficie de una función continua. Para motivarlo consideremos el siguiente problema: Hallar la masa total de una membrana que ocupa una región del espacio que podemos considerar una superficie \mathcal{S} despreciando una dimensión.

Si la membrana es de un material homogéneo, su masa será una proporción del área de \mathcal{S} . Llamamos a esa proporción “densidad superficial de masa”: ρ_0 . Por lo tanto,

$$\text{Masa total} = \rho_0 \text{Area}(\mathcal{S}).$$

Si la membrana está formada por parches \mathcal{S}_k de materiales homogéneos de densidad superficial de masa ρ_k ,

$$\text{Masa total} = \sum \rho_k \text{Area}(\mathcal{S}_k).$$

Si ahora la membrana está formada por un material inhomogéneo con densidad superficial de masa $\rho(x, y, z)$ continua, podemos aproximarla por

$$\bigcup_{i,j / R_{ij} \subset D} S_{ij}$$

ya que la superficie que estamos despreciando tiene área que tiende a 0 y por lo tanto tendrá masa que tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Además, podemos pensar que cada S_{ij} está formado por un material homogéneo de densidad superficial de masa igual a $\rho(P_{ij})$ donde $P_{ij} \in S_{ij}$ es arbitrario, ya que ρ varía muy poco sobre S_{ij} .

Por lo tanto,

$$\text{Masa total} \sim \sum_{i,j / R_{ij} \subset D} \rho(P_{ij}) \text{Area}(S_{ij}).$$

Sabemos que $\text{Area}(S_{ij}) = \iint_{R_{ij}} \|T_u \times T_v\| du dv$.

Por el Teorema del valor medio integral, existe un punto $(u_{ij}, v_{ij}) \in R_{ij}$ tal que esta última integral coincide con $\|(T_u \times T_v)(u_{ij}, v_{ij})\| \Delta u \Delta v$.

Como el punto P_{ij} en R_{ij} era arbitrario, podemos elegirlo como $P_{ij} = T(u_{ij}, v_{ij})$ y tenemos

$$\text{Masa total} \sim \sum_{i,j / R_{ij} \subset D} \rho(T(u_{ij}, v_{ij})) \|(T_u \times T_v)(u_{ij}, v_{ij})\| \Delta u \Delta v.$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito tenemos

$$\text{Masa total} = \iint_D \rho(T(u, v)) \|(T_u \times T_v)(u, v)\| du dv.$$

Estas consideraciones y otras aplicaciones llevan a la siguiente definición

DEFINICIÓN 2.6. Sea \mathcal{S} una superficie suave que admite una parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Llamamos integral de superficie de f en \mathcal{S} a

$$\iint_{\mathcal{S}} f dS := \iint_D f(T(u, v)) \|(T_u \times T_v)(u, v)\| du dv.$$

Para ver que ésta es una buena definición debemos ver que no depende de la parametrización regular utilizada ya que pretendemos que sea algo que sólo depende de \mathcal{S} y de f . Esto se va a deducir del siguiente resultado.

TEOREMA 2.2. *Sea \mathcal{S} una superficie suave que admite dos parametrizaciones regulares $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $T_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Entonces, T_1 es una reparametrización de T . Es decir, existe una biyección $G : D_1 \rightarrow D$, $G \in C^1$ con Jacobiano no nulo en todos los puntos tal que $T_1(u, v) = T(G(u, v))$ para todo $(u, v) \in D_1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sólo se dará la idea. Como T_1 y T son biyecciones a \mathcal{S} , dado $(u, v) \in D_1$, existe un único $(r, t) \in D$ tal que $T_1(u, v) = T(r, t)$.

Llamemos $G(u, v) := (r, t)$. Claramente, G es una biyección entre D_1 y D .

Se puede probar (no lo haremos) que G es continuamente diferenciable. Por lo tanto, por la Proposición 2.4 se tiene que

$$T_{1u}(u, v) \times T_{1v}(u, v) = (T_r(G(u, v)) \times T_t(G(u, v))) \mathcal{J}_G(u, v)$$

donde \mathcal{J}_G es el determinante de la matriz asociada al diferencial de la transformación G . (El Jacobiano es el módulo de este determinante).

Como $T_{1u}(u, v) \times T_{1v}(u, v) \neq 0$, se sigue que $\mathcal{J}_G \neq 0$. □

Obtenemos enseguida el resultado buscado

TEOREMA 2.3. *Sea \mathcal{S} una superficie suave que admite dos parametrizaciones regulares $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $T_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces,*

$$\iint_D f(T(r, t)) \|T_r \times T_t\| dr dt = \iint_{D_1} f(T_1(u, v)) \|(T_1)_u \times (T_1)_v\| du dv.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.2 sabemos que existe una biyección $G : D_1 \rightarrow D$, $G \in C^1$ con Jacobiano no nulo en todos los puntos tal que $T_1(u, v) = T(G(u, v))$ para todo $(u, v) \in D_1$. Además, $\|(T_1)_u(u, v) \times (T_1)_v(u, v)\| = \left\| T_r(G(u, v)) \times T_t(G(u, v)) \right\| |DG(u, v)|$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \iint_{D_1} f(T_1(u, v)) \|(T_1)_u(u, v) \times (T_1)_v(u, v)\| du dv \\ &= \iint_{D_1} f(T(G(u, v))) \left\| (T_r(G(u, v)) \times T_t(G(u, v))) \right\| |DG(u, v)| du dv \\ &= \iint_D f(T(r, t)) \|T_r(r, t) \times T_t(r, t)\| dr dt. \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos aplicado el Teorema de cambio de variables en integrales dobles. □

TEOREMA 2.4 (Teorema del valor medio). *Sea \mathcal{S} una superficie suave que admite una parametrización regular y $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Existe un punto $P_0 \in \mathcal{S}$ tal que*

$$\iint_{\mathcal{S}} f dS = f(P_0) \text{Area}(\mathcal{S}).$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es similar a los otros teoremas del valor medio. Sólo hay que observar que de la definición de integral de superficie se deduce que

$$\min_{\mathcal{S}} f \leq \frac{1}{\text{Area}(\mathcal{S})} \iint_{\mathcal{S}} f dS \leq \max_{\mathcal{S}} f$$

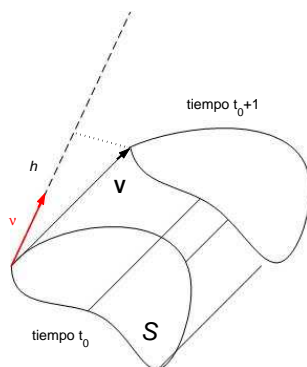
y usar la continuidad de f para deducir que el promedio de f en \mathcal{S} es $f(P_0)$ para algún $P_0 \in \mathcal{S}$. □

4. Orientación de superficies y flujo a través de una superficie

Para motivar la definición consideremos el siguiente problema: Sea \mathbf{V} el campo de velocidades de un fluido. Supongamos por un momento que \mathbf{V} es constante. Si una partícula está en un punto P_0 en el instante t_0 estará en el punto $P_0 + \mathbf{V}$ en el instante $t_0 + 1$.

Supongamos que tenemos una superficie plana \mathcal{S} contenida en el plano perpendicular a un vector unitario ν . Queremos saber cuanto fluido atraviesa la superficie \mathcal{S} en una unidad de tiempo en el sentido dado por el vector ν .

Las partículas que estaban sobre \mathcal{S} se movieron hasta una superficie que es la translación de \mathcal{S} por el vector \mathbf{V} . El fluido que estaba al otro lado del plano y atravesó la superficie \mathcal{S} en ese intervalo de tiempo llenó una región cilíndrica (ver figura).



Por lo tanto, el volumen que atravesó \mathcal{S} en una unidad de tiempo es el volumen de esta región que es igual a la superficie de la base \mathcal{S} por la altura $h = |\mathbf{V} \cdot \nu|$.

Observemos que $\mathbf{V} \cdot \nu$ es positivo si apuntan para el mismo lado del plano y negativo si no. Podemos tomar la convención de que la cantidad total que fluye a través de \mathcal{S} por unidad de tiempo en el sentido dado por ν tenga signo, y que ese signo identifique si el flujo se da en el sentido del vector ν (en ese caso lo tomamos como positivo), o en el sentido opuesto (en ese caso lo tomamos como negativo). Como $\mathbf{V} \cdot \nu$ tiene el signo que corresponde a esta convención, decimos que la cantidad de fluido que atraviesa la superficie \mathcal{S} en el sentido dado por el vector ν es $(\mathbf{V} \cdot \nu) \text{Area}(\mathcal{S})$.

Si \mathcal{S} no es plana, pero es suave, la partimos en pedazos chicos que resultan casi planos: $\mathcal{S} = \cup S_k$. En cada S_k elijo un punto P_k y tomo un versor ν_k normal a \mathcal{S} en P_k . Aproximo a S_k por una superficie plana de igual área contenida en el plano perpendicular a ν_k .

Hay dos elecciones posibles de versor ν_k normal al plano tangente a \mathcal{S} en P_k . Necesito que haya una elección de vector normal unitario $\nu(P)$ en cada punto $P \in \mathcal{S}$ que varíe con continuidad al moverme sobre \mathcal{S} para que al reemplazar $\nu(P)$ por $\nu(P_k)$ para $P \in S_k$ no haya variado mucho.

Esta elección $\nu(P)$ continua debemos poder hacerla sobre toda la superficie \mathcal{S} porque este es un proceso de aproximación y los pedazos S_k van cambiando paso a paso haciéndose más pequeños. En este proceso, si $\nu(P)$ no es continua globalmente, podría resultar discontinua en uno de los pedacitos de superficie que aproximamos por superficies planas y esto no tendría sentido.

Observemos que la elección de vector normal unitario $\nu(P)$ nos está dando el sentido (la orientación) en que quiero medir cuánto fluido atraviesa \mathcal{S} por el punto P . No tendría sentido que esa elección no fuera continua porque al tener $\nu(P)$ norma 1, la discontinuidad indicaría un salto brusco de orientación.

Vamos a ver después que esto no necesariamente puede hacerse en toda superficie suave. Lo que lleva a la Definición 2.7 de orientabilidad que daremos más adelante.

Siguiendo con nuestro cálculo de la cantidad de fluido que atraviesa una superficie “orientada” por unidad de tiempo, hemos dividido a \mathcal{S} en pedazos S_k pequeños y reemplazado cada uno de estos pedazos por una superficie plana de la misma área contenida en el plano perpendicular a $\nu(P_k)$ donde $P_k \in S_k$ se elige arbitrariamente por la poca variación que los versores $\nu(P)$ tienen sobre S_k . Ahora, observamos que también podríamos admitir que el campo de velocidades \mathbf{V} no fuera constante. Pero necesitamos que sea continuo sobre \mathcal{S} para que varíe poco sobre cada S_k . En ese caso, lo reemplazamos en S_k por $\mathbf{V}(P_k)$. De modo que la cantidad de fluido que atraviesa S_k por unidad de tiempo será aproximadamente $(\mathbf{V} \cdot \nu)(P_k) \text{Area}(S_k)$.

Finalmente, la cantidad total de fluido que atraviesa \mathcal{S} en el sentido dado por la elección $\nu(P)$, $P \in \mathcal{S}$ será aproximadamente

$$\sum_k (\mathbf{V} \cdot \nu)(P_k) \text{Area}(S_k).$$

Esta suma aproxima, cuando las áreas de los S_k tienden a 0 a la integral de superficie de la función escalar continua $(\mathbf{V} \cdot \nu)$. A saber,

$$\iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{V} \cdot \nu) dS.$$

Con esta motivación consideramos las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 2.7. Decimos que una superficie suave \mathcal{S} es orientable si hay una forma de elegir en cada punto P de \mathcal{S} un único versor normal $\nu(P)$ de modo que la función vectorial que esta elección define sobre \mathcal{S} resulte continua.

Por ejemplo, si \mathcal{S} es un gráfico, $\mathcal{S} : z = f(x, y)$, se puede elegir en todos los puntos un versor normal que apunte hacia arriba (es decir, con componente z positiva). Esta elección es continua en \mathcal{S} .

Si \mathcal{S} es el borde de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de tipos I, II o III, se puede elegir como $\nu(P)$ la normal que apunta hacia afuera de Ω .

En general, si \mathcal{S} es una superficie que admite una parametrización regular en el sentido de la Definición 2.4, \mathcal{S} resulta orientable (Proposición 2.5). Pero si la parametrización T deja de ser inyectiva, \mathcal{S} podría ser no orientable aunque se tenga $T \in C^1$ y $T_u \times T_v \neq 0$ en todos lados.

Observar la diferencia entre orientabilidad y continuidad de la recta normal. Por ejemplo, en la Cinta de Moebius la recta normal es continua pero la Cinta no es orientable.

Se puede ver una animación de la Cinta de Moebius donde se observa la suavidad de la misma y se ve que no se puede elegir un versor normal que se mueva continuamente sobre la misma. En la animación se mueve un versor normal y se ve que al volver al punto de partida se llega con el versor normal opuesto al del comienzo.

<http://mate.dm.uba.ar/~wolanski/unmoebius.zip>

PROPOSICIÓN 2.5. *Sea \mathcal{S} una superficie suave que admite una parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Para cada $P \in \mathcal{S}$, sea*

$$\nu(P) = \frac{T_u(u, v) \times T_v(u, v)}{\|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\|}, \quad \text{donde } (u, v) \text{ es tal que } P = T(u, v).$$

Entonces, esta elección de versor normal resulta continua y por lo tanto da una orientación a la superficie \mathcal{S} . En este caso, decimos que \mathcal{S} está orientada por la parametrización T .

DEFINICIÓN 2.8. *Sea \mathcal{S} una superficie orientada por el campo continuo de versores normales $\nu(P)$. Sea \mathbf{F} un campo vectorial continuo sobre \mathcal{S} . Llamamos flujo de \mathbf{F} a través de \mathcal{S} a la integral*

$$\iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \cdot \nu) dS.$$

¿Cómo calcular el flujo de \mathbf{F} a través de una superficie orientada \mathcal{S} si ésta admite una parametrización regular?

Sea $\nu(P)$ el campo continuo de versores normales que da la orientación de \mathcal{S} . Sea $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de \mathcal{S} . Como vimos en la proposición 2.5 la elección

$$(2.16) \quad \nu_T(P) = \frac{T_u(u, v) \times T_v(u, v)}{\|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\|}, \quad \text{donde } (u, v) \text{ es tal que } P = T(u, v)$$

determina un campo continuo de versores normales sobre \mathcal{S} .

Hay sólo dos posibilidades

- $\nu_T(P) = \nu(P)$ para todo $P \in \mathcal{S}$,
- o bien
- $\nu_T(P) = -\nu(P)$ para todo $P \in \mathcal{S}$.

En el primer caso decimos que T preserva la orientación de \mathcal{S} . En el otro caso, que la invierte.

Si T preserva la orientación de \mathcal{S} , la usamos para calcular la integral. Tenemos,

$$\iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \cdot \nu) dS = \iint_D (\mathbf{F} \cdot \nu)(T(u, v)) \|(T_u \times T_v)(u, v)\| du dv.$$

Usando que $\nu(P) = \nu_T(P)$, la expresión de ν_T en (2.16) y simplificando las $\|(T_u \times T_v)(u, v)\|$ se llega a

$$(2.17) \quad \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \cdot \nu) dS = \iint_D \mathbf{F}(T(u, v)) \cdot (T_u \times T_v)(u, v) du dv.$$

Esto motiva la siguiente notación para el flujo de \mathbf{F} a través de la superficie orientada \mathcal{S} :

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Observemos que esta notación requiere indicar previamente cuál es la orientación de \mathcal{S} .

Finalmente, supongamos que la parametrización regular T invierte la orientación. De todos modos podemos usarla para el cálculo del flujo. En efecto, en este caso

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \cdot \nu) dS \\ &= \iint_D (\mathbf{F} \cdot \nu)(T(u, v)) \|(T_u \times T_v)(u, v)\| du dv \\ &= - \iint_D (\mathbf{F} \cdot \nu_T)(T(u, v)) \|(T_u \times T_v)(u, v)\| du dv \\ &= - \iint_D \mathbf{F}(T(u, v)) \cdot (T_u \times T_v)(u, v) du dv. \end{aligned}$$

Ejercicios

EJERCICIO 2.7. Sea $\phi(r, \theta) : [0, 1] \times [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad z = \theta$$

la parametrización de una superficie \mathcal{S} . Graficar \mathcal{S} , hallar un vector normal en cada punto y hallar su área.

EJERCICIO 2.8. Sea $\phi(u, v) : D \mapsto \mathbb{R}^3$ (D el disco unitario centrado en el origen)

$$\phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$$

la parametrización de una superficie. Calcular su área.

EJERCICIO 2.9. Calcular el área de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$. (bóveda de Viviani).

EJERCICIO 2.10. Sea la curva $z = f(x)$ $x \in [\alpha, \beta]$ con f y α positivos, girada alrededor del eje z . Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Aplicar a la superficie dada en el Ejercicio 2.2 ítem (a) para calcular el área del paraboloides elíptico con $1 \leq z \leq 2$, y $a = b = 1$.

EJERCICIO 2.11. Sea \mathcal{C} la curva

$$\begin{cases} x = \cos^3 \theta \\ y = \sin^3 \theta \end{cases}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ en el plano xy . Sea S la superficie que se obtiene al girar la curva \mathcal{C} alrededor del eje x

1. Hallar una parametrización de S .
2. Hallar el área de S .

EJERCICIO 2.12. Calcular $\int_S xy \, dS$ donde S es el borde del tetraedro con lados $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ y $x = y$.

EJERCICIO 2.13. Calcular $\int_S (x + y + z) \, dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

EJERCICIO 2.14. Hallar la masa de una superficie esférica de radio r tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia entre (x, y, z) y el punto $(0, 0, r)$.

EJERCICIO 2.15. Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

EJERCICIO 2.16. Si la temperatura en un punto de \mathbb{R}^3 está dada por la función $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$, calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo $-\nabla T$) a través de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, orientada de forma que la normal en el punto $(0, 0, \sqrt{2})$ sea $(0, 0, 1)$.

EJERCICIO 2.17. Sea S la superficie de la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea \mathbf{F} un campo vectorial y F_r su componente radial. Probar que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_r \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta$$

EJERCICIO 2.18. Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con z entre 1 y 2 orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ con $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

EJERCICIO 2.19. Sean S una superficie orientada y C una curva cerrada simple que es el borde de S con alguna de sus dos posibles orientaciones. Verificar que si \mathbf{F} es un campo gradiente ($\mathbf{F} = \nabla f$) entonces

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

EJERCICIO 2.20. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x^2, yx^2)$ que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano xy a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Bibliografía

- [1] T. Apostol, "Calculus", Vol. I, Ed. Reverté, 1960.
- [2] T. Apostol, "Calculus", Vol. II, Ed. Reverté, 1960.
- [3] J. Marsden, A. Tromba, "Vector Calculus". Freeman and Company, New York 1988.