Práctica 5

(1) Hallar la transformada de Legendre de $\tau(q) = e^{-q}$.

(2) Sean $p_1, \dots, p_m$ que satisfacen: $0 < p_i < 1, i = 1, \dots, m$ y $p_1 + \cdots + p_m = 1$. Sean $r_1, \dots r_m$ los factores de contracción de m similaridades de $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supongamos además que los números $\{\log p_i / \log r_i\}$ son todos diferentes. Además sea $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$\phi(q, \tau) := \sum_{i=1}^{m} p_i^q r_i^\tau.$$

Si $\tau : \mathbb{R} \to I$ es la función implícitamente definida por

$$\phi(q, \tau(q)) = 1,$$

probar que τ es (estrictamente) convexa, ambas asíntotas pasan por el orígen, y hallar el rango de $\tau = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$. Deducir que en ese caso $f(\alpha_{\min}) = f(\alpha_{\max}) = 0$.

(3) Sea μ la medida autosimilar asociada al IFS definido por

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x, \quad f_2(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}, \quad p_1 = p, p_2 = 1 - p.$$

Hallar una fórmula explícita para $\tau(q)$.

(4) Determinar para qué valor de α, E_α tiene dimensión de Hausdorff máxima, y hallarla, para los casos de los dos ejercicios anteriores.

(5) Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^d$, y sea $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una función bi-lipschitz. sea $\nu = g^\sharp(\mu)$. Probar que la función $f_H(\alpha)$ es la misma para μ y ν.