
Práctica 3

(1) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un Boreliano, sea μ una distribución de masa (finita) en $\mathbb{R}^n$ y sea $0 < c < \infty$.
  (a) Si $\liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))/r^s \leq c$ para todo $x \in E$, entonces $\mathcal{P}^2 \geq 2^s\mu(E)/c$.
  (b) Si $\liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))/r^s \geq c$ para todo $x \in E$, entonces $\mathcal{P}^2 \leq 2^s\mu(E)/c$.

(2) Dimensión local:

$$\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r}$$
$$\overline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r}$$

  (a) Si $\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x) \geq s$ para todo $x \in E$ y $\mu(E) > 0$, entonces $\dim_H E \geq s$.
  (b) Si $\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x) \leq s$ para todo $x \in E$, entonces $\dim_H E \leq s$.
  (c) Si $\overline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x) \geq s$ para todo $x \in E$ y $\mu(E) > 0$, entonces $\dim_P E \geq s$.
  (d) Si $\overline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x) \leq s$ para todo $x \in E$, entonces $\dim_P E \leq s$.

(3) Sea C un conjunto de Cantor generalizado, en el cual cada uno de los intervalos I_j^{k-1} del paso $k-1$ contiene al menos m_k intervalos del paso k, que están separados por *gaps* de longitud como mínimo ε_k, donde $0 < \varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$ para cada k. Entonces

$$\dim_H C \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k \varepsilon_k)}.$$

Estimar la dimensión de HAusdorff para el caso particular en el que $|I_j^k| = \delta_k$ para cada j.