

## Práctica 1

- (1) Sea  $\{a_k\}$  tal que  $a_{k+m} \leq a_k + a_m + \alpha$ . Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m} \text{ existe y } a_k \geq ka - \alpha.$$

- (2) Sean  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$  y  $\beta_i$  números reales arbitrarios. Probar que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i (-\log \alpha_i + \beta_i) \leq \log \left( \sum_{i=1}^m e^{\beta_i} \right),$$

y vale la igualdad si y sólo si  $\alpha_i = \frac{e^{\beta_i}}{\sum_{i=1}^m e^{\beta_i}}$ .

- (3) sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función diferenciable. Mostrar que  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k^{1/k}$  existe, donde  $b_k = \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{d}{dx} f^k(x) \right|$  y  $f^k$  es la iteración  $k$ -ésima de  $f$ . (Sug. use regla de la cadena para probar que  $b_k$  es sub-multiplicativa).
- (4) Sea  $\mathbb{Q} = (q_1, q_2, \dots)$  una enumeración de los números racionales. Para  $A \subset \mathbb{R}$  definamos  $\mu(A) = \sum_{q_i \in A} 2^{-i}$ . Verificar que  $\mu$  es una medida y  $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Mostrar que  $\text{supp} \mu = \mathbb{R}$ , pero  $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$ , o sea,  $\mu$  está ‘concentrada’ en  $\mathbb{Q}$ .
- (5) Para  $k \in \mathbb{N}$  sea  $\{X_{i_1 \dots i_k} : i_j \in \{1, 2\}\}$  el conjunto de los intervalos del nivel  $k$  de la construcción del Conjunto de Cantor  $C$ , y sea  $\mathcal{E}$  el conjunto de todos estos intervalos. Si definimos  $\mu(X_{i_1 \dots i_k}) = 2^{-k}$  entonces

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_i \mu(V_i) : A \cap C \subset \cup V_i \text{ y } V_i \in \mathcal{E} \right\},$$

es una medida soportada en  $C$ . Y también vale lo mismo si definimos  $\mu(X_{i_1 \dots i_k}) = (1/3)^{n_1} (2/3)^{n_2}$  donde  $n_1$  y  $n_2$  son la cantidad de dígitos 1 y 2 que ocurren en  $(i_1 \dots i_k)$  respectivamente.