Ejercicios que quedan de la teórica

(1) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$. Probar que f es una función contractiva, considerando $\mathbb{R}^2$ con la $\|\ \|_2$.

(2) Sea $a = \{\frac{1}{n^p}$, y C_a el conjunto de Cantor asociado a dicha sucesión. Probar que $H^{1/p}(C_a) \geq \frac{1}{8}\left(\frac{2^p}{2^p-2}\right)^{1/p}$.

(3) Sea F un conjunto cerrado en X un espacio métrico, F_ϵ el conjunto "engordado" en ϵ, y sea

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin F_\epsilon \\ 1 - d(x,F) & \text{si } x \in F_\epsilon - F \\ 1 & \text{s } x \in F \end{cases}$$

Probar que f_ϵ es Lipschitz.

(4) Sea $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy (en la distancia de Hausdorff) de compactos no vacíos en $\mathbb{R}^d$. Sean

$$\mathcal{K}_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{there exist } x_n \in K_n \text{ such that } \lim_{n\to\infty} x_n = x\},$$

y

$$\mathcal{K} = \cap_{N=1}^{\infty}\overline{\cup_{i\geq N} K_i}.$$

Probar que $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}$.

(5) Sean $\{f_1, \ldots, f_N\}$ funciones contractivas, $f_i : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, con atractor $\mathcal{A}$, es decir $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^N f_i(\mathcal{A})$.

Sea $\Omega_N = \{1, \ldots, N\}^{\mathbb{N}} = \left\{\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} : \alpha_i \in \{1, \ldots, N\}\right\}$ y sea $\phi : \Omega_N \longrightarrow \mathcal{A}$ definida por:

$$\phi(\alpha) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} f_{\alpha_1} \circ \ldots \circ f_{\alpha_n}(\mathcal{A})$$

Analizar para que casos de $\{F_1, \ldots, F_N\}$ la función ϕ es inyectiva.