C. R. Acad. Sci. Paris, t. 317, Série I, p. 745-750, 1993

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Formalisme multifractal pour les fonctions

Stéphane JAFFARD

Résumé — On montre que le formalisme multifractal pour les fonctions fournit (en toute généralité) seulement une majoration du spectre des singularités, mais qu'il est exact pour les fonctions autosimilaires, que l'on définira.

Multifractal formalism for functions

Abstract — *We prove that the multifractal formalism for functions generally only yields an upper bound for the spectrum of singularities, but it is exact for selfsimilar functions.*

Abridged English Version — Let $x_0 \in \mathbb{R}^m$ and $\alpha > -m$; $C^\alpha(x_0)$ is the set of functions f such that in a neighbourhood of x_0 $|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$ where P is a polynomial of degree less than α. For any $\alpha > 0$, $f \in \Gamma^\alpha(x_0)$ if

$$f \in \bigcap_{\varepsilon > 0} C^{\alpha - \varepsilon}(x_0) \quad \text{but } f \notin \bigcup_{\varepsilon > 0} C^{\alpha + \varepsilon}(x_0).$$

The set of points x_0 such that f belongs to $\Gamma^\alpha(x_0)$ will be denoted by $E^{(\alpha)}$ and $d(\alpha)$ is the Hausdorff dimension of $E^{(\alpha)}$.

Let $S_p(l) = \int |f(x+l) - f(x)|^p \, dx$ and $\zeta(q) = \liminf(\log S_q(l)/\log l)$; and similarly, let $\tilde{Z}(a, q) = \int |C(a, b)|^q \, db$; and $\eta(q) = \liminf(\log \tilde{Z}(a, q)/\log a)$ [where $C(a, b)$ is the wavelet transform of f].

The following formulas (the so-called multifractal formalism for functions) have been proposed for the computation of $d(\alpha)$ ([2], [6]).

$$d(\alpha) = \inf_p (p\alpha - \xi(p) + m) \qquad \textit{or} \qquad d(\alpha) = \inf_q (m + q\alpha - \eta(q))$$

(and in [2] an alternative formula which takes into account only the local maxima of the wavelet transform).

THEOREM 1. — *Let $d(\alpha)$ be continuous positive on $\mathbb{R}^+$; there exists f_1 and f_2 which share the same function η, but the spectrum of f_1 is $d(\alpha)$ and f_2 is C^∞ except at* 0.

Nonetheless the following upper bound holds for any function f such that $\eta(p) < m$, $\forall p$;

$$d(\alpha) \leq \inf_p (m - \eta(p) + \alpha p).$$

If f has no global smoothness, this formula also holds, but $d(\alpha)$ becomes the packing dimension of the strong α-singularities (see [12] *for a definition*).

We then prove that the multifractal formalism holds for selfsimilar functions which are defined as follows.

Note présentée par Yves MEYER.

0764-4442/93/03170745 $ 2.00

• $\exists\,\Omega$ bounded open set, $S_1, \ldots, S_\alpha$ contractive similitudes such that

$$S_i(\Omega)\subset\Omega \quad \text{and} \quad S_i(\Omega)\cap S_j(\Omega)=\varnothing \quad \text{if } i\neq j. \tag{1}$$

• $\exists\, g\in C^k$ with fast decay such that $F(x)=\sum_{i=1}^{d}\lambda_j F(S_j^{-1}(x))+g(x)$

• $\exists\, x_0$ in Ω such that F is not $C^k(x_0)$.

THEOREM 2. — *If f is selfsimilar and* $\inf_{i=1,\ldots,d}(\log\lambda_i/\log\mu_i)>0$, *$d(\alpha)$ vanishes outside* $[\inf(\log\lambda_i/\log\mu_i), \sup(\log\lambda_i/\log\mu_i)]$, *and attains its maximum at a unique α_1.*

If g is C^∞ and $\alpha\leqq\alpha_1$, $d(\alpha)$ is the Legendre transform of $\eta(q)-m$ or of $\zeta(q)-m$.

If g is C^k, let p_0 such that $\tau(p_0)=kp_0-m$ and let α_2 be the Legendre transform at p_0 of the function τ defined by $\sum_{i=1}^{d}\lambda_i^a\mu_i^{-\tau(a)}=1$; *then $d(\alpha)$ is the Legendre transform of $\eta(q)-m$ or of $\zeta(q)-m$ for $\alpha\leqq\alpha_2$. If* $\sum_{i=1}^{d}|\lambda_i|\,|\mu_i|^m<1$, *the packing dimension of the strong α-singularities of f is given by* $D(\alpha)=\inf(a\,\alpha-\tau(a))$.

---

1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉ DES RÉSULTATS. — Les données expérimentales disponibles sur la turbulence développée ainsi que les simulations numériques montrent clairement l'aspect intermittent de ces écoulements ([6], [13]); et notamment l'ensemble des points au voisinage desquels la vitesse du fluide n'est pas bornée semble avoir une dimension de Hausdorff strictement plus petite que 3 [13]. Cela permet de penser que la détermination de cette dimension (et plus généralement de la dimension des points où la vitesse a une régularité donnée) fournirait une information importante sur la nature de la turbulence. Le calcul direct de ces dimensions conduit à des calculs numériques beaucoup trop instables pour fournir des résultats fiables, c'est pourquoi Frisch et Parisi [6] ont proposé une formule, inspirée par la physique statistique, reliant ces dimensions à des quantités numériquement calculables. Plus récemment, Arneodo, Bacry et Muzy ont proposé des formules alternatives faisant intervenir la transformée en ondelettes de la vitesse de l'écoulement ([2], [3], [15]). Nous allons étudier la validité de ces « formalismes multifractals pour les fonctions ».

Commençons par quelques préliminaires sur la régularité höldérienne. Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. Supposons que $s>-m$; on dit que f appartient à $C^s(x_0)$ si $|f(x)|\leqq C|x-x_0|^s$; si $s\leqq -m$, on exige de plus que f appartienne à l'espace de Besov $B_\infty^{s,\infty}$.

Cette définition coïncide avec la définition usuelle dans le cas $s>0$; elle en est la généralisation immédiate si $-m<s\leqq 0$; et dans ce dernier cas, la condition d'appartenance à $B_\infty^{s,\infty}$ est automatiquement satisfaite. Il est donc naturel de l'imposer quand $s<-m$, en effet dans ce cas, la première condition ne suffit plus pour impliquer que f soit une distribution. Cette définition se justifie par ailleurs *a posteriori* par la proposition 1 qui suit.

On définit les espaces deux-microlocaux de la façon suivante. Soit ψ une fonction C^{s+1}, à support compact, ayant tous ses moments d'ordre inférieur à s nuls; la transformée en ondelettes de f est la fonction $C(a, b)=a^{-m}\int f(t)\,\psi((t-b)/a)\,dt$. Rappelons qu'une distribution appartient à l'espace deux-microlocal $C^{s,s'}(x_0)$ si sa transformée en ondelettes vérifie $|c(a,b)| \leq C a^s (1+|(x_0-b)/a|)^{-s'}$. La régularité ponctuelle est reliée à la taille de la transformée en ondelettes par le résultat suivant (*cf.* [12] pour des résultats complémentaires).

Proposition 1. — *On a les deux inclusions suivantes :* $C^s(x_0) \subsetneq C^{s,-s}(x_0)$ *et si* $s'<s$, $C^{s,-s'}(x_0) \subsetneq C^s(x_0)$.

Cette proposition est démontrée dans [8] si $s>0$; la généralisation est aisée.

Pour tout $s>0$ nous écrivons $f \in \Gamma^\alpha(x_0)$ si

$$f \in \bigcap_{\varepsilon>0} C^{\alpha-\varepsilon}(x_0) \quad \text{mais } f \notin \bigcup_{\varepsilon>0} C^{\alpha+\varepsilon}(x_0). \tag{2}$$

Nous désignerons par $E^{(\alpha)}$ l'ensemble des nombres réels x_0 tels que f appartienne à $\Gamma^\alpha(x_0)$ et par $d(\alpha)$ la dimension de Hausdorff de $E^{(\alpha)}$.

Décrivons maintenant les différents formalismes multifractals utilisés.

- *La fonction de structure :* on calcule tout d'abord $S_p(l) = \int |f(x+l)-f(x)|^p \, dx$. Soit $\zeta(p) = \liminf (\log S_p(l)/\log l)$; alors $d(\alpha) = \inf_p (p\alpha - \xi(p) + m)$.
- *L'intégrale de la transformée en ondelettes :* on calcule $\tilde{Z}(a,q) = \int |C(a,b)|^q \, db$; soit $\eta(q) = \liminf (\log \tilde{Z}(a,q)/\log a)$; alors $d(\alpha) = \inf_q (m + q\alpha - \eta(q))$.
- *Les maxima de la transformée en ondelettes :* on calcule

$$Z(a,q) = \sum_{l \in \mathscr{L}(a)} \sup_{(b,a') \in l} |C(a',b)|^q$$

où l est une ligne de maxima de la transformée en ondelettes sur $[a, 0]$, et $\sup\limits_{(b,a') \in l}$ signifie que le sup est atteint pour (b, a') sur cette ligne de maxima (si bien que $a' \leqq a$). Soit $\theta(q) = \liminf (\log Z(a,q)/\log a)$; alors $d(\alpha) = \inf_q (q\alpha - \theta(q))$.

2. Résultats valables pour toutes fonctions.

Proposition 2. — *Soit* $f \in L^1$. *Alors, si* $q>1$, *on a* $\zeta(q) = \eta(q)$.

Rappelons (*cf.* [14]) qu'une fonction f appartient à l'espace de Besov $B_p^{s,q}$ si

$$\int_{a>0} \left[\int |C(a,b)|^p \, db \right]^{q/p} \frac{da}{a^{sq+1}} < +\infty$$

(cette formule permet de définir ces espaces si $p \leqq 1$); donc $\tau'(p) = \sup\{\tau : F \in B_p^{\tau/p,\infty}\}$.

Les espaces $H^{s,p}$ sont définis de la façon suivante (pour $s \geqq 0$ et $p \geqq 1$). Si s n'est pas entier, $s = m+\sigma$ avec m entier et $0<\sigma<1$; $f \in H^{s,p}$ si $f \in L^p$ et pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| = m$, $\int |\partial^\alpha f(x+h) - \partial^\alpha f(x)|^p \, dx \leq C |h|^{\sigma p}$. On voit que $\xi_p = \sup\{s : f \in H^{s/p,p}\}$.

Par ailleurs, si $p \geqq 1$: $H^{s+\varepsilon,p} \subsetneq B_p^{s,\infty} \subsetneq H^{s-\varepsilon,p}$, $\forall \varepsilon > 0$ (*cf.* [1] et [12]; donc $\xi(p) = \tau'(p)$.

Par ailleurs la formule à partir des maxima de la transformée en ondelettes fournit le même résultat, sous réserve que l'on ne prenne pas plus qu'un nombre fixé de maxima dans une boîte de taille a.

En général le formalisme multifractal est faux pour une fonction arbitraire. Ce n'est pas uniquement la formule de la transformée de Legendre qui est mise en défaut, mais même la donnée de toutes les valeurs de $\eta(p)$ ne suffit pas pour déterminer le spectre.

THÉORÈME 1. — *Soit $d(\alpha)$ une fonction continue positive définie sur $\mathbb{R}^+$. Alors il existe deux fonctions f_1 et f_2 qui ont les propriétés suivantes :*

- *Le spectre des singularités de f_1 est la fonction $d(\alpha)$.*
- *Les fonctions f_1 et f_2 ont même fonction $\eta(p)$.*
- *La fonction f_2 est C^∞ en dehors de l'origine.*

Esquissons la démonstration de ce résultat. Soit $d(\alpha)$ une fonction continue positive définie sur $\mathbb{R}^+$; on utilise pour f_1 la fonction construite dans [10] qui a pour spectre $d(\alpha)$; cette fonction est définie par ses coefficients sur une base orthonormée d'ondelettes.

La fonction f_1 ainsi définie, on construit f_2 comme étant la fonction qui a les mêmes coefficients d'ondelettes non nuls que f_1 pour une échelle j fixée, mais telle que ces coefficients soient localisés le plus près possible de 0. Comme le nombre de coefficients non nuls de f_1 à échelle j est un $o(2^j)$, on voit que f_2 est C^∞ en dehors de l'origine, et que f_1 et f_2 ont même norme dans $B_p^{s,\infty}$ (en prenant pour norme dans cet espace sa caractérisation sur la base d'ondelettes choisie), d'où le théorème.

Quoique le formalisme multifractal soit en général faux, on a cependant le résultat suivant.

THÉORÈME 2. — *Soit f une fonction telle que $\eta(p)>m$ pour tout $p>0$; alors*

$$d(\alpha)\leqq \inf_{p>0}\,(m-\eta(p)+\alpha p).$$

Ce résultat est, si $p>1$, une reformulation d'un résultat de [12]. La démonstration se généralise aisément au cas $0<p\leqq 1$.

Si la fonction f n'a pas de régularité globale, on a un résultat analogue concernant la dimension de packing des singularités fortes de la fonction. Rappelons d'abord la définition de ces expressions.

Soient $J>0$ et Λ_J l'ensemble des cubes dyadiques de taille 2^{-J} contenant un point de E. On définit Mes^d et mes^d par

$$\mathrm{Mes}^d(E)=\lim_{J\to+\infty}\sum_{\lambda\in\Lambda_J}2^{-dJ}=\Lambda_J^{\#}2^{-dJ}$$

$$\mathrm{mes}^d(E)=\inf_{E\subset\cup E_n}\sum_n \mathrm{Mes}^d(E_n).$$

La dimension de packing de E est la valeur de d pour laquelle $\mathrm{mes}^d(E)$ passe de $+\infty$ à 0.

DÉFINITION 1. — *Soit α tel que $-m<\alpha\leqq 1$; un point x_0 est une α-singularité forte de f s'il existe C, C' tels que $\forall j$, il existe A_j, B_j*

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{mes}\,A_j\geqq C\,2^{-mj},\qquad \mathrm{mes}\,B_j\geqq C\,2^{-mj}\\ \forall x\in A_j\cup B_j,\qquad |x-x_0|\leqq 2^{-j}\\ \sup_{A_j} f\leqq C'\,2^{-\alpha j}+\inf_{B_j} f \end{array}\right.\tag{3}$$

Cette définition a été introduite dans [12] où l'on prouve le résultat suivant :

PROPOSITION 3. — *Si* $D(\alpha)$ *est la dimension de packing des* α*-singularités fortes de* f *et* $-m<\alpha\leqq 1$, *alors*

$$D(\alpha)\leqq\inf_p(m-\eta(p)+\alpha p). \tag{4}$$

3. FONCTIONS AUTOSIMILAIRES : DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES. — On introduit la notion de fonction autosimilaire par analogie avec celle d'ensemble autosimilaire (*cf.* [7]); grossièrement, ce sont des fonctions dont le graphe est localement une contraction du graphe global « modulo une fonction régulière ».

DÉFINITION 2. — *Une fonction* (*ou une distribution*) $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ *à support compact est autosimilaire* (*d'ordre* k) *si*

- *il existe* Ω *ouvert borné et* $S_1,\ldots,S_\alpha$ *similitudes strictement contractantes telles que*

$$S_i(\Omega)\subset\Omega \qquad et \qquad S_i(\Omega)\cap S_j(\Omega)=\varnothing \quad si\ i\neq j. \tag{5}$$

Les S_i *sont le produit d'une isométrie et d'une contraction de rapport* $\mu_i<1$.

- *Il existe une fonction* $g\in C^k$, *à décroissance rapide telle que*

$$F(x)=\sum_{i=1}^{d}\lambda_j F(S_j^{-1}(x))+g(x) \tag{6}$$

- *Il existe* x_0 *dans* Ω *tel que* F *n'est pas* $C^k(x_0)$.

La première condition a été introduite par Hutchinson (dans [7]) pour étudier les ensembles autosimilaires (« open set condition »). On exige parfois une condition plus forte, à savoir $S_i(\bar{\Omega})\cap S_j(\bar{\Omega})=\varnothing$ if $i\neq j$ (« separated open set condition »). Arneodo, Bacry et Muzy font cette hypothèse dans [3] pour montrer le formalisme multifractal pour les primitives de certaines mesures. Nous allons montrer que le formalisme multifractal est valide pour les fonctions autosimilaires (sous certaines restrictions).

En itérant la formule (6) on voit que formellement

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{(i_1,\ldots,i_n)}\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_n}g(S_{i_n}^{-1}\ldots S_{i_n}^{-1}\ldots S_{i_1}^{-1}(x)). \tag{7}$$

PROPOSITION 4. — *On a les résultats de convergence suivants.*

- *Si* $\alpha_0=\inf_{i=1,\ldots,d}(\log\lambda_i/\log\mu_i)$ *est* >0, *la série* (7) *converge dans* $C^{\alpha_0}(\mathbb{R}^m)$.
- *Si* $\sum_{i=1,\ldots,d}|\lambda_i||\mu_i|^m<1$, *la série* (7) *converge dans* L^1.
- *Si* $\sum_{i=1,\ldots,d}|\lambda_i|^p|\mu_i|^m<1$ *pour un* $p<1$, *la série* (7) *converge dans l'espace de Hardy réel* H^p, *pourvu que les moments de* g *d'ordre inférieur à* $m(p^{-1}-1)$ *s'annulent.*

Ce résultat s'obtient en estimant la taille de la transformée en ondelettes de f partout, et en utilisant la caractérisation de ces espaces en ondelettes.

4. DÉTERMINATION DU SPECTRE DES SINGULARITÉS.

PROPOSITION 5. — *Soit* τ *la fonction définie par* $\sum_{i=1}^{d}\lambda_i^a\mu_i^{-\tau(a)}=1$. *Supposons que* $\inf_{i=1,\ldots,d}(\log\lambda_i/\log\mu_i)\,0$, *soit* $\alpha<k$. *Alors* $d(\alpha)=(\inf_a a\alpha-\tau(a))$.

L'estimation de la taille de $C(a,b)$ partout permet de calculer exactement la régularité de f en tout point (*cf.* [12]). On détermine les dimensions des ensembles où f est Γ^α par un argument classique de mesures multifractales : on construit sur ces ensembles une famille de mesures qui ont certains « scaling locaux ». Chacune de ces mesures donne une majoration de la dimension de l'ensemble considéré; de plus l'une de ces mesures fournit le cas d'égalité.

L'estimation de la taille de $C(a, b)$ permet également de calculer exactement la fonction $\eta(p)$ et l'on trouve que pour $p>0$ on a $\eta(p)=\tau(p)$ pourvu que $p>p_0$ défini par $\tau(p_0)=kp_0-m$ (ce qui fournit $p=0$ si g est C^∞).

THÉORÈME 3. — *Si f est autosimilaire et* $\inf_{i=1,\ldots,d}(\log\lambda_i/\log\mu_i)>0$, $d(\alpha)$ *s'annule hors de* $[\inf(\log\lambda_i/\log\mu_i), \sup(\log\lambda_i/\log\mu_i)]$ *et y est concave. Sa valeur maximale* $d_{\max}$ *vérifie* $\sum\mu_i^{d_{\max}}=1$, *et est atteinte pour un certain* $\alpha=\alpha_1$.

Si g est C^∞ et si $\alpha\leqq\alpha_1$, $d(\alpha)$ s'obtient en calculant la transformée de Legendre de $\eta(q)-m$ ou de $\zeta(q)-m$.

Si g est C^k, soit p_0 défini par $\tau(p_0)=kp_0-m$ et soit $\alpha_2\,(<\alpha_1)$ la valeur de la transformée de Legendre de τ en p_0; si $\alpha\leqq\alpha_2$, $d(\alpha)$ s'obtient en calculant la transformée de Legendre de $\tau(q)$, ou de $\eta(q)-m$ ou de $\zeta(q)-m$.

Si l'un des $|\lambda_i|$ est strictement supérieur à 1, $d(\alpha)$ est nulle sauf en 0 et l'énoncé précédent doit être modifié comme suit.

THÉORÈME 4. — *Si l'on a seulement* $\sum_{i=1}^{d}|\lambda_i||\mu_i|^m<1$, *mais que la « separated open set condition » est vérifiée, la dimension de packing des α-singularités fortes de f est fournie par* $D(\alpha)=\inf(a\alpha-\tau(a))$.

Le formalisme multifractal pour les mesures tel qu'il est développé par exemple dans [4] donne des résultats analogues, pour les mesures, à ceux exposés ici.

Les démonstrations esquissées dans cette Note se trouvent dans [11].

L'auteur remercie Alain Arneodo, Emmanuel Bacry et Yves Meyer pour de nombreuses discussions très stimulantes.

Note remise le 9 juillet 1993, acceptée le 1er septembre 1993.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic press, 1978.

[2] A. ARNEODO, E. BACRY et J.-F. MUZY, *Wavelet analysis of fractal signals. Direct determination of the singularity spectrum of fully developped turbulence data*, Preprint, 1991.

[3] E. BACRY, A. ARNEODO et J.-F. MUZY, *Singularity spectrum of fractal signals from wavelet analysis: exact results*, Preprint, 1991.

[4] G. BROWN, G. MICHON et J. PEYRIÈRE, *On the multifractal analysis of measures*, Preprint, 1991.

[5] I. FALKONER, *Fractal geometry*, John Wiley and sons, 1990.

[6] U. FRISCH et G. PARISI, *Fully developped turbulence and intermittency*.

[7] J. E. HUTCHINSON, Fractals and selfsimilarity, *Indiana Univ. Math. J.*, 30, 1981, p. 713-747.

[8] S. JAFFARD, Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelet coefficients, *Publicacions Matemàtiques*, 35, 1991, p. 155-168.

[9] S. JAFFARD, Sur la dimension de Hausdorff des points singuliers d'une fonction, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 314, série I, 1991, p. 31-36.

[10] S. JAFFARD, Construction de fonctions multifractales ayant un spectre de singularités prescrit, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 315, série I, 1992, p. 19-24.

[11] S. JAFFARD, *Selfsimilar functions*, Preprint, 1993.

[12] S. JAFFARD et Y. MEYER, *Pointwise behavior of functions*, Preprint, 1993.

[13] B. MANDELBROT, *Journal of Fluid Mechanics*, 62, 1974, p. 331.

[14] Y. MEYER, *Ondelettes et opérateurs*, Hermann, 1990.

[15] J.-F. MUZY, A. ARNEODO et E. BACRY, *Direct determination of the singularity spectrum of fully developed turbulence data*, Preprint, 1991.

[16] C. TRICOT, *Thèse*, Université d'Orsay.

CERMA (URA n° 1502 du CNRS),
École Nationale des Ponts et Chaussées, la Courtine, 93167 Noisy le Grand, France.