Práctica 1

(1) Sea $\{a_k\}$ tal que $a_{k+m} \leq a_k + a_m + \alpha$. Entonces
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_m}{m} \quad \text{existe y} \quad a_k \geq ka - \alpha.$$
(2) sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función diferenciable. Mostrar que $\lim_{k\to\infty} b_k^{1/k}$ existe, donde $b_k = \sup_{0\leq x\leq 1} |\frac{d}{dx} f^k(x)|$ y f^k es la iteracion k-ésima de f. (Sug. use regla de la cadena para probar que b_k es sub-multiplicativa).

(3) Sea $\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Sean $\{x_i, \ldots, x_n\} \subset X$ y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$, tales que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Probar que
$$\psi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(x_i).$$
(4) Sea $\mathbb{Q} = (q_1, q_2, \ldots)$ una enumeración de los números racionales. Para $A \subset \mathbb{R}$ definamos $\mu(A) = \sum_{q_i \in A} 2^{-i}$. Verificar que μ es una medida y $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Mostrar que supp$\mu = \mathbb{R}$, pero $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$, o sea, μ está 'concentrada' en $\mathbb{Q}$.

(5) Para $k \in \mathbb{N}$ sea $\{X_{i_1\ldots i_k} : i_j \in \{1,2\}\}$ el conjunto de los intervalos del nivel k de la construcción del Conjunto de Cantor C, y sea $\mathcal{E}$ el conjunto de todos estos intervalos. Si definimos $\mu(X_{i_1\ldots i_k}) = 2^{-k}$ entonces
$$\mu(A) = \inf\{\sum_i \mu(V_i) : A \cap C \subset \cup V_i \text{ y } V_i \in \mathcal{E}\},$$
es una medida soportada en C. Y también vale lo mismo si definimos $\mu(X_{i_1\ldots i_k}) = (1/3)^{n_1}(2/3)^{n_2}$ donde n_1 y n_2 son la cantidad de dígitos 1 y 2 que ocurren en $(i_1 \ldots i_k)$ respectivamente.