Práctica 3

(1) Verificar que

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0}\left(\inf\left\{\sum_i (\mathrm{diam}(U_i))^s,\right.\right.$$

$$\left.\left.\text{donde } U_i \text{ son conjuntos } \textit{cerrados} \text{ de diámetro } <\delta, \bigcup_i U_i \supseteq F\right\}\right).$$

(2) Probar que $\mathcal{H}^0(F)$ coincide con la cantidad de puntos en el conjunto F.

(3) Sea $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de clase C^1. Mostrar que para cualquier subconjunto $F \subseteq \mathbb{R}^d$, $\dim_H(f(F)) \leq \dim_H(F)$. (Sugerencia: considerar primero conjuntos acotados F).

(4) Sea $f(x) = x^3$ y $F \subset \mathbb{R}$. Mostrar que $\dim_H(f(F)) = \dim_H(F)$.

(5) ¿Cuál es la dimensión de Hausdorff del conjunto de puntos $x \in [0,1]$ que en su expansión en base 8 $(0.a_1a_2\dots)$ satisfacen que existe un entero positivo k tal que $a_i \notin \{0,2,3,4,6,7\}$ para todo $i \geq k$?

(6) Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ el círculo unitario con los puntos parametrizados por el ángulo θ que forman con el eje x. Sea

$$F = \{\theta \in S : 0 \leq 3^k\theta \leq \pi (\mod 2\pi), k \in \mathbb{N}\}.$$

Hallar $\dim_H(F)$.

(7) Sea F el subconjunto de los reales de números cuya expansión en base 4 $b_mb_{m-1}\dots b_2b_1.a_1a_2\dots$ tales que ninguno de los dígitos b_i o a_i es 1 o 2 (o sea el Cantor set 1/4 construido para afuera y para adentro). Cuál es la dimensión de Hausdroff de F?

(8) Mostrar que para todo $0 \leq s \leq 2$ existe un conjunto totalmente disconexo del plano, de dimensión de Hausdorff igual a s.