Práctica 2

(1) Hallar un conjunto satisfaciendo la *condición de conjunto abierto* para las cuatro transformaciones de similaridad que definen la *curva de von Koch*. Deducir que la misma tiene efectivamente la dimensión box y Hausdorff $\frac{\log 4}{\log 3}$.

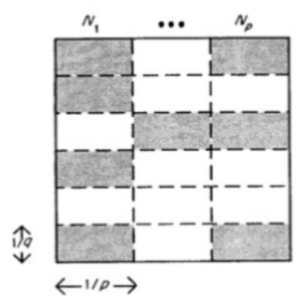
(2) Sea F el conjunto que se obtiene con una construcción de tipo Cantor, en la cual cada intervalo es reemplazado por dos intervalos uno de longitud $\frac{1}{4}$ en el extremo izquierdo, y otro de longitud $\frac{1}{2}$ en el extremo derecho. O sea, $E_0 = [0,1]$, $E_1 = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$, etc. Hallar la dimensión de Hausdorff y box de F.

(3) Sean $S_1, S_2 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dadas por:

$$S_1(x) = \frac{x}{2+x} \quad S_1(x) = \frac{2}{2+x}.$$

Mostrar que el atractor (conjunto invariante) asociado a estas transformaciones satisface que $0.53 < \dim_H < 0.8$.

(4) Sea E_0 el cuadrado unitario. Lo dividimos en $p \times q$ rectangulos de lado $1/p$ y $1/q$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $p < q$. Seleccionamos un subconjunto de estos rectángulos para construir E_1, y sea N_j el número de rectángulos seleccionados en la columna j, $1 \leq j \leq p$. Iteramos este procedimiento en la manera usualen cada rectangulo de E_1. Sea F el conjunto límite.



(a) Escriba este sistema como un sistema iterado de funciones.

(b) Si $N_j = N$ para $1 \leq j \leq p$, probar que

$$\dim_H F = \dim_B F = 1 + \frac{\log N}{\log q}.$$

(c) Si $p = 2$, $q = 3$, $N_1 = 2, N_2 = 1$ donde se eligen el rectangulo de mas abajo y mas arriba en la columna 1 y el del medio de la columna 2. Probar que $\dim_H(F) \lneq \dim_B(F)$, y

$$\dim_H(F) = \log\left(2^{\frac{\log 2}{\log 3}} + 1\right) \frac{1}{\log 2}$$

$$\dim_B(F) = 1 + \log\left(\frac{3}{2}\right) \frac{1}{\log 3}.$$