Práctica 1

Los ejercicios marcados con * son optativos.

(1) Muestre un ejemplo de un espacio métrico (X, d) y una función $f : X \to X$ tal que
$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \forall\ x, y \in X,$$
(a) f **no tiene** punto fijo.
(b) f **tiene infinitos** puntos fijos.
(c) f **tiene un único** punto fijo.

(2) * Probar que las siguientes definiciones son equivalentes:
- $K \subset \mathbb{R}^d$ es compacto.
- $K \subset \mathbb{R}^d$ es cerrado y acotado.
- (*) $K \subset \mathbb{R}^d$ ies cerrado y totalmente acotado. (**Def:** un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ es *totalmente acotado* si para todo $\varepsilon > 0$ existen finitas ε-bolas que cubren A, i.e. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon)$.

(3) Muestre que las siguientes definiciones de la distancia de Hausdorff definen métricas equivalentes en $\mathcal{H}$. En particular, pruebe que cada una de ellas es una distancia. (Recuerde $d(x, B) = \inf_{y \in B}\{\| x - y \}$)
(a)
$$(d_H)_1(A, B) := \inf_{\varepsilon}\{A \subseteq B_\varepsilon \quad \mathbf{y} \quad B \subseteq A_\varepsilon\}.$$
(b)
$$(d_H)_2(A, B) := D(A, B) + D(B, A), \quad \text{donde} \quad D(A, B) := \sup_{x \in A}\{d(x, B)\}.$$
(c)
$$(d_H)_3(A, B) := \frac{D(A, B) + D(B, A)}{2}, \quad \text{donde} \quad D(A, B) := \sup_{x \in A}\{d(x, B)\}.$$

(4) * Encontrar una sucesión K_i de conjuntos compactos tales que
$$\bigcap_{N=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i \geq N} K_i} \neq \overline{\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{i \geq N} K_i}.$$