Práctica 3

(1) Mostrar (para cada item) un ejemplo de un espacio métrico (X, d) y una función $f : X \to X$ tal que
$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \forall\ x, y \in X,$$
  (a) f **no** tiene punto fijo.
  (b) f tiene **infinitos** puntos fijos.
  (c) f tiene **un único** punto fijo.

(2) Muestre que las siguientes definiciones son equivalentes:
- $K \subset \mathbb{R}^d$ es compacto.
- $K \subset \mathbb{R}^d$ es cerrado y acotado.
- (*) $K \subset \mathbb{R}^d$ es cerrado y totalmente acotado. (**Def:** un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ es *totalmente acotado* si para cada $\varepsilon > 0$ exist un número finite de bolas de radio ε que cubren A, i.e. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon)$.)

(3) Muestre que las siguientes definiciones de la distancia de Hausdorff, definen métricas equivalente en $\mathcal{H}$. En particular, demuestre que cada una de ellas es una distancia. (Recordar que $d(x, B) = \inf_{y \in B} \{\| x - y \|\}$, y sea $D(A, B) = \sup_{x \in A} \{d(x, B)\}$)
  (a)
$$(d_H)_1(A, B) = \inf_{\varepsilon} \{A \subseteq B_\varepsilon \quad \mathbf{y} \quad B \subseteq A_\varepsilon\}.$$
  (b)
$$(d_H)_2(A, B) = D(A, B) + D(B, A).$$
  (c)
$$(d_H)_3(A, B) = \frac{D(A, B) + D(B, A)}{2}.$$

(4) Hallar una sucesión de conjuntos compactos K_i tales que
$$\bigcap_{N=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i \geq N} K_i} \neq \overline{\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{i \geq N} K_i}.$$

(5) Para $1 \leq p < +\infty$, sea
$$L^p(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : \|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} < +\infty \right\}$$
con λ la medida Lebesgue; y
$$L^\infty(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : \ \|f\|_\infty := \text{ess.sup.}\|f(.)\| \quad \text{es escencialmente acotada.} \right\}$$
Mostrar que con las definiciones anteriores, $(L^p(\mathbb{R}^d), \|.\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, son espacios de Banach.