

Práctica 1

- (1) Verificar que

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf \left\{ \sum_i (\text{diam}(U_i))^s, \right. \right. \\ \left. \left. \text{donde } U_i \text{ son conjuntos cerrados de diámetro } < \delta, \cup_i U_i \supseteq F \right\} \right).$$

- (2) Probar que $\mathcal{H}^0(F)$ coincide con la cantidad de puntos en el conjunto F .
 (3) Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de clase C^1 . Mostrar que para cualquier subconjunto $F \subseteq \mathbb{R}^d$, $\dim_H(f(F)) \leq \dim_H(F)$. (Sugerencia: considerar primero conjuntos acotados F).
 (4) Sea $f(x) = x^3$ y $F \subset \mathbb{R}$. Mostrar que $\dim_H(f(F)) = \dim_H(F)$.
 (5) ¿Cuál es la dimensión de Hausdorff del conjunto de puntos $x \in [0, 1]$ que en su expansión en base 8 ($0.a_1a_2\dots$) satisfacen que existe un entero positivo k tal que $a_i \notin \{0, 2, 3, 4, 6, 7\}$ para todo $i \geq k$?
 (6) Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ el círculo unitario con los puntos parametrizados por el ángulo θ que forman con el eje x . Sea

$$F = \{\theta \in S : 0 \leq 3^k \theta \leq \pi \pmod{2\pi}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Hallar $\dim_H(F)$.

- (7) Sea F el subconjunto de los reales de números cuya expansión en base 4 $b_m b_{m-1} \dots b_2 b_1 . a_1 a_2 \dots$ tales que ninguno de los dígitos b_i o a_i es 1 o 2 (o sea el Cantor set 1/4 construido para afuera y para adentro). Cuál es la dimensión de Hausdorff de F ?
 (8) Mostrar que para todo $0 \leq s \leq 2$ existe un conjunto totalmente desconexo del plano, de dimensión de Hausdorff igual a s .